

CLOQUET

—

PERSPECTIVE

—

1823







J. H. Alexander

NOUVEAU TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE PERSPECTIVE

A L'USAGE DES ARTISTES.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER.

NOUVEAU TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE PERSPECTIVE
A L'USAGE DES ARTISTES
ET DES PERSONNES QUI S'OCCUPENT DU DESSIN,

PRÉCÉDÉ

DES PREMIÈRES NOTIONS DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, DE L'OPTIQUE ET DE LA PROJECTION DES OMBRES;

PAR J.-B. CLOQUET,

Ancien Dessinateur de l'Inspection générale des Échelles du Levant au service de la Marine royale de France; ex-Professeur de Dessin à l'École des Mines et à celle de la Brigade topographique au Dépôt des Fortifications, etc.



PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE (SUCCESSEUR DE MME V^{E} COURCIER),

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1823.

PRÉFACE.

Voué par goût et par devoir, depuis nombre d'années, à l'enseignement du Dessin et de ses différentes branches, j'ai eu fréquemment l'occasion de remarquer que la plupart des artistes qui devaient leur talent distingué uniquement à beaucoup d'exercice et à une longue pratique, dessinaient le plus souvent plutôt comme ils croyaient voir que comme ils voyaient en effet. Ceux qui, parmi eux, ont reconnu leur erreur et ont voulu rectifier leur jugement par l'étude des règles de la Perspective, ont eu recours aux nombreux ouvrages qui traitent de cette science ; mais, ayant rencontré des difficultés auxquelles ils ne s'étaient pas attendus, et qu'ils ne pouvaient pas prévoir, ils ont été découragés. Les obstacles ne venaient sûrement pas de leur défaut d'intelligence; ils dépendaient plutôt de deux autres causes principales.

1°. Il existe un préjugé assez généralement répandu, et qui veut que l'étude de la Perspective n'exige aucune peine, et demande le sacrifice seulement de quelques jours.

2°. En ne faisant pas attention que la Perspective est une des nombreuses branches des Mathématiques, on ne s'aperçoit pas qu'on ne peut l'entendre qu'en possédant au moins les premiers élémens de celles-ci; et en ignorant ce qu'il est absolument essentiel de savoir en ce genre, on se trouve effrayé de la carrière qu'on croit avoir à parcourir: on se rebute, et on dédaigne une science qu'on aurait facilement apprise (*en travaillant cependant*) si, d'avance, l'on s'était persuadé qu'elle présente beaucoup de difficultés, ce qui aurait fait apporter à son étude toute l'attention dont on est capable.

Il m'est arrivé plusieurs fois de demander à des artistes qui m'avaient témoigné leur désir de savoir la Perspective, s'ils avaient quelque teinture des premiers élémens de la Géométrie. Ils m'ont répondu négativement, disant d'ailleurs qu'ils n'en avaient pas besoin, qu'ils ne voulaient savoir que la *Perspective seule*, ou plutôt que la *Perspective des peintres*. Et cependant il n'y a qu'une seule et unique Perspective, et autant vaudrait-il, à mon avis, en manifestant un pareil désir, demander à écrire sans vouloir apprendre à lire. Ma manière de raisonner les a eu bientôt convaincus, mais ne les a pas tous persuadés. J'ai toujours observé que ceux qui s'en sont rapportés à moi, que ceux qui ont bien voulu se résigner à étudier les prin-

cipes préliminaires, ont appris très facilement et véritablement la Perspective, science qu'aucun peintre ne doit ignorer. C'est là ce qui m'a engagé à réduire les élémens de la Perspective à ses principes essentiels, et à les mettre à la portée des lecteurs qui n'ont aucune notion des Mathématiques, ce qui est assez rare heureusement. J'ai donc divisé cet Ouvrage en cinq parties. La première traite de la *Géométrie élémentaire*, dont j'ai cru devoir retrancher toutes les choses étrangères à notre objet, telles que celles qui concernent la mesure des surfaces, des solides, etc. La deuxième contient les principes purement élémentaires de la *Géométrie descriptive*, qui n'est elle-même qu'une suite ou une application des principes de la première partie. La troisième traite seulement de la partie de l'*Optique* qui a un rapport direct à notre objet, c'est-à-dire de l'Optique considérée plutôt sous le rapport de la Peinture que sous celui de la Physique. La quatrième contient les règles de la *Projection des Ombres*, très nécessaires, non-seulement aux Peintres, mais encore aux Architectes, aux Dessinateurs, etc. Enfin, la cinquième traite de la *Perspective*, qui est le dernier et principal objet que nous nous sommes proposé de traiter.

Il n'existe, à ma connaissance, aucun ouvrage rédigé sur ce plan; je ne crois pas que celui-ci doive

dispenser d'en composer par la suite, d'autres plus complets et plus importans, mais je m'estimerai heureux d'avoir ouvert en ce genre la carrière à ceux qui viendront après moi.

Nota. Un Théorème est l'énoncé d'une vérité qui a besoin d'être démontrée, ou plutôt c'est le résultat ou la conséquence d'une vérité déjà démontrée ou reconnue.

Un Problème est la demande de faire quelques opérations, comme de construire une figure d'après des principes déjà connus.

NOUVEAU TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE PERSPECTIVE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE.

Tous les objets dont nous sommes environnés sont nommés indifféremment par les géomètres *corps* ou *solides*.

Les corps sont étendus en tous sens, et ont toujours trois dimensions, *longueur, largeur,* et *épaisseur* ou *profondeur*. Quoique ces trois dimensions soient toujours réunies dans tout ce qui est corps, nous pouvons néanmoins les séparer par la pensée : ainsi, lorsque nous considérons la distance d'une ville à une autre, nous ne faisons attention qu'à la longueur du chemin, et nullement à sa largeur ni à son épaisseur. De même, si nous considérons l'étendue d'une pièce d'eau, nous ne pensons qu'à sa longueur et à sa largeur; et si nous ne voulons connaître que sa profondeur, nous négligeons ses deux autres dimensions. Enfin, si nous voulons apprécier toutes les dimensions d'une pierre ou d'une pièce de bois, nous faisons attention à sa longueur, à sa largeur

et à son épaisseur. La science qui a pour objet les propriétés de ces trois sortes d'étendues s'appelle *Géométrie*.

Si nous examinons avec attention un corps ou solide quelconque, par exemple le corps A (pl. I, fig. 1), nous verrons d'abord qu'il est terminé de toutes parts; ses limites sont nommées *surfaces*, *faces* ou *superficies*. Examinant de même chacune de ces surfaces, nous verrons qu'elles sont aussi terminées de tous côtés; ces nouvelles limites se nomment *lignes*. Telles sont les lignes *ab*, *bc*, *ad*, etc. Enfin, si nous examinons chacune de ces lignes, nous verrons qu'elles ont aussi leurs limites : par exemple, la ligne *ab* est terminée en *a* et en *b*, et ainsi des autres. Ces dernières limites sont nommées *points*, et doivent être considérées comme étant le dernier résultat de l'analyse d'un corps.

Nous voyons donc que la figure d'un corps est composée de surfaces, de lignes et de points, que nous pouvons regarder comme étant les élémens des trois dimensions de ce corps. Essayons si avec ces élémens nous pourrons recomposer ce même corps. Supposons maintenant que ce corps s'évanouisse à l'exception du seul point *a*, puis concevons ce point se mouvant directement vers *b*, et laissant après lui la trace de son mouvement; nous verrons qu'il aura engendré la ligne *ab* : concevons de même cette ligne *ab* se portant directement par un mouvement uniforme vers *cd*, et laissant aussi les traces de sa marche sur toute sa longueur; il est évident que cette ligne aura décrit ou engendré la surface *abcd* ou *ac*, car le point *a* aura décrit la ligne *ad*, le point *b* aura décrit celle *bc*, et la ligne *ab* se trouvera alors en *dc* : le résultat sera donc la surface *ac* terminée par quatre lignes. Enfin, concevons cette surface *ac* s'élevant verticalement ou de bas en haut et aussi par un mouvement uniforme; nous verrons que la ligne *ab* aura décrit la surface *ab'*, la ligne *ad* aura décrit la surface *ad'*; la ligne *bc*, la surface *bc'*; et la ligne *cd*, la surface *cd'*; enfin la surface *ac* se trouvera en *a'c'*, surface supérieure terminant le

corps. Par conséquent le corps A sera engendré par le mouvement du seul point *a*; d'où il suit qu'avec un point nous pouvons déterminer les formes ou figures des corps. Nous allons nous occuper successivement des principales propriétés des points, des lignes, des surfaces, et enfin des solides.

Une ligne comme *ab*, formée par le mouvement direct d'un point *a* vers un autre point *b*, se nomme ligne *droite*. Il est évident qui si le point *a*, pour parvenir en *b*, se fût détourné de la direction *ab*, il aurait décrit une ligne plus longue que la droite *ab*; d'où il suit qu'*une ligne droite est la plus courte distance d'un point à un autre.*

Soit la surface *ab* (fig. 2), sur laquelle nous pouvons appliquer exactement et dans tous les sens une ligne droite ou une règle bien dressée comme en *ab*, *cd*, *ef*, etc.; si cette règle touche cette surface dans toute sa longueur, on nomme alors cette dernière surface *surface plane*, ou simplement *plan*. Donc *une surface plane est celle sur laquelle on peut appliquer, exactement et en tous sens, une règle ou une ligne droite.*

Toutes les lignes dont nous aurons à nous occuper d'abord seront supposées tracées sur une surface plane, ou dans un même plan.

Si nous essayons d'appliquer la même règle dont nous venons de parler sur la surface d'un corps Z nommé *sphère* (ou vulgairement *boule*), nous verrons d'abord que cette règle ne touchera la surface de ce corps qu'en un seul point *a*. Cette seconde surface, si différente de la première, est nommée *surface courbe*. Il y a donc plusieurs sortes de surfaces, des surfaces planes et des surfaces courbes. Il est facile de voir que les surfaces planes ne peuvent être que d'une seule espèce, mais qu'il peut y en avoir une infinité de courbes, qu'on distingue en *surfaces courbes régulières* et *irrégulières* : par exemple, la surface du corps Y (fig. 4), que la règle touche en plusieurs points *a*, *b*, *c*, etc., appartient à ces dernières. Nous voyons encore que ces surfaces nous

paraissent aussi terminées par des lignes *abcde*, etc., qui sont très différentes de la ligne droite, et qu'on nomme *lignes courbes*. De même que les surfaces, ces lignes sont distinguées en lignes *courbes régulières* et en *irrégulières*. Ces dernières peuvent varier indéfiniment.

Nous allons d'abord nous occuper de lignes droites.

Des lignes droites, de leurs positions et de leurs combinaisons.

Soit un point donné dans l'espace, tel que *a* (pl. 1, fig. 5); nous concevrons facilement que ce point peut se mouvoir dans toutes sortes de directions, et peut par conséquent décrire une infinité de lignes droites. Si nous voulions désigner une de ces droites par le seul point *a*, nous ne le pourrions pas, puisqu'il appartient à toutes ces lignes; un seul point ne suffit donc pas pour déterminer la direction d'une droite : mais si nous ajoutons un second point *b* à une de ces lignes, elles ne seront plus confondues; nous verrons d'abord que la direction *ab* sera déterminée, et que nous ne pourrons mener par ces deux points que la seule ligne *ab*; d'où il suit que *deux points déterminent la direction d'une ligne droite*.

La position d'une droite est une manière d'être de cette ligne par rapport à une autre ligne droite; car une droite considérée seule ne peut avoir de position; elle n'a qu'une direction déterminée par les deux points de ses extrémités. Deux droites ne peuvent avoir que deux positions l'une à l'égard de l'autre; elles peuvent se rencontrer ou bien ne pas se rencontrer. Si elles se rencontrent, on les nomme lignes *concourantes* ou *convergentes;* et lorsqu'elles ne peuvent se rencontrer, on les nomme lignes *parallèles*. Ainsi les droites *ab*, *cb* (fig. 6), qui concourent vers un même point *b*, sont convergentes; mais si nous les considérons d'une manière inverse, c'est-à-dire en partant du point *b*, où elles

se touchent, et en les suivant dans leur écartement *ba*, *bc*, nous les nommerons lignes *divergentes*. En un mot, des lignes convergentes tendent à se rapprocher, et des lignes divergentes vont toujours en s'écartant les unes des autres. L'écartement de ces lignes ou l'ouverture *abc* qu'elles laissent entre elles se nomme *angle* : donc *un angle est l'ouverture de deux lignes qui se coupent ou qui se rencontrent.*

Les droites *ab*, *de* qui sont à égale distance l'une de l'autre sur toute leur longueur, et qui ne peuvent jamais se rencontrer, aussi loin qu'on les suppose prolongées, sont dites *parallèles*, et elles le sont réciproquement; car *ab* est parallèle à *de*, comme *de* est parallèle à *ab*.

Une droite n'en peut rencontrer une autre que de deux manières différentes; car l'une, par exemple, *ab* (fig. 7) ne penchera pas plus vers *c* que vers *d* sur la droite *cd*, tandis qu'une autre penchera plus vers *c* ou vers *d*, comme *eb* ou *fb*. Dans la première de ces positions, on dit qu'elle est *perpendiculaire;* et dans la seconde, on dit qu'elle est *inclinée* ou *oblique* à cette même ligne: ainsi *ab* est perpendiculaire sur *cd*, et *eb* ou *fb* est incliné ou oblique sur *cd*. D'où il suit qu'*une ligne droite est perpendiculaire sur une autre lorsqu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre sur cette même droite*, et réciproquement.

Concevons la droite *ab* couchée originairement sur *bd*, puis s'élevant graduellement par une de ses extrémités, et en tournant sur le point *b* comme autour d'une charnière, de manière à passer successivement par *f*, *a*, *e*, etc., jusqu'à ce qu'elle soit arrivée en *c*, nous verrons d'abord que l'ouverture *dbf* est plus petite que celle *dba*, et que l'ouverture *dbe* est plus grande que l'ouverture *dba*, etc.; par conséquent les différens angles que ces droites forment par leurs ouvertures sont plus ou moins grands; et, afin de pouvoir les reconnaître, on leur a donné différens noms : ainsi l'angle *abd*, formé par les perpendiculaires *ab*, *bd*, est nommé

angle droit; l'angle *fbd*, formé par les droites *fb*, *bd*, plus petit que l'angle droit, se nomme *angle aigu;* enfin l'angle *dbe*, plus grand que l'angle droit, est appelé *angle obtus*.

On distingue encore dans un angle quelconque un *sommet* et deux *côtés*. Ainsi *b* (fig. 6) est le sommet de l'angle *abc* ou *cba*, et les droites *ab*, *cb* en sont les côtés. Lorsqu'un angle est seul comme celui-ci, on peut le désigner simplement par son sommet; ainsi l'on dira l'angle *b*. Mais lorsqu'un sommet est commun à plusieurs angles, comme *b* (fig. 7), on désigne ceux-ci par trois notes dont celle du sommet occupera le milieu, et l'on dira l'angle *cbf* ou *fbc*, l'angle *abc* ou *cba*, etc.

L'angle *dbf* plus l'angle *fba* égale l'angle droit *dba*; l'un de ces deux angles est donc ce qu'il faut à l'autre pour compléter un angle droit; c'est pour cela qu'on les a nommés *complément* l'un de l'autre : ainsi l'angle *dbf* est le complément de l'angle *fba*, et réciproquement. On appelle encore complément d'un angle ce qu'il faut en retrancher pour qu'il vaille un angle droit; ainsi pour que l'angle *dbe* soit égal à l'angle droit *dba*, il faut en retrancher l'angle *abe*. Ce dernier est donc complément de l'angle *dba*; donc *le complément d'un angle est ce qu'il faut ajouter ou retrancher de cet angle pour qu'il vaille un angle droit.*

L'angle *dbf*, plus l'angle *fbc*, égale les deux angles droits *dba*, *abc*; chacun des deux premiers angles est donc ce qu'il faut à l'autre pour valoir deux angles droits : c'est pour cette raison qu'on les a nommés *supplémens* l'un de l'autre. Ainsi, l'angle *dbf* est le supplément de l'angle *fbc*, et réciproquement. Donc *le supplément d'un angle est ce qu'il faut ajouter à ce même angle pour qu'il vaille deux angles droits.*

Si une droite *fb* rencontre une droite *cd*, ces deux lignes forment entre elles deux angles *dbf*, *fbc*, qui auront *fb* pour côté commun, et la droite *cd* pour les deux autres côtés. Ces angles sont nommés *angles de suite;* donc *les angles de suite sont*

deux angles qui ont un côté commun, et dont les deux autres côtés sont sur une seule et même ligne droite.

Concevons la droite *fg* couchée d'abord sur *cd*, et s'élevant ensuite par son extrémité *f* en tournant sur le point *b*, il est évident que lorsque son extrémité *f* se sera éloignée de *d* de la quantité *df*, l'autre extrémité *g* se sera éloignée de *c* de la même quantité; et lorsque cette droite sera en *ah* ou perpendiculaire sur *cd*, les deux parties *ab*, *bh* de cette droite seront également perpendiculaires sur *cd*; de même que *fb*, *gb* seront aussi également inclinés sur la même droite *cd*: par conséquent l'angle *dbf* égale l'angle *cbg* et l'angle *dbg* égale l'angle *fbc*. Il en sera de même des quatre angles droits formés par les deux perpendiculaires *ah*, *cd*. Observons que ces quatre angles droits sont opposés l'un à l'autre par leur sommet *b*, ainsi que les quatre autres angles formés par l'inclinaison des deux droites *cd*, *fg*; ce qui fait qu'on les nomme *angles opposés au sommet*. Donc *les angles opposés au sommet sont égaux*.

La somme des quatre angles *cbe*, *eba*, *abf*, *fbd* égale les deux angles droits *cba*, *abd*. Nous voyons facilement qu'il en serait de même si ces angles étaient en plus grand nombre. Donc *la somme de tous les angles faits d'un même côté sur une droite, et d'un même point comme sommet, équivaut à deux angles droits.*

Il est évident qu'il en serait de même de la somme de tous les angles que nous pourrions faire du même point *b* au-dessous de *cd*; d'où il résulte que *la somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un point, équivaudra à quatre angles droits.*

D'après ce que nous avons dit des angles opposés au sommet, nous devons remarquer que lorsqu'une droite est perpendiculaire ou inclinée sur une autre droite, ces deux droites sont réciproquement perpendiculaires ou inclinées l'une à l'autre. Evitons encore de confondre la perpendiculaire avec la verticale, ce qui arrive assez fréquemment. On dit qu'une droite est verticale

lorsqu'elle est perpendiculaire à l'horizon ou bien à une droite qui serait parallèle à l'horizon, et qu'on appelle pour cette raison *ligne horizontale*. Ainsi, une droite formée par un fil au bout duquel est suspendu un plomb, est une *verticale* (les artisans la nomment ligne d'aplomb). Ainsi, une ligne verticale est toujours perpendiculaire, au lieu qu'une perpendiculaire n'est pas toujours verticale, puisque la droite avec laquelle elle ferait un angle droit n'est pas toujours parallèle à l'horizon; ce qu'il est important de bien distinguer. Par exemple : *ab* est une ligne verticale parce qu'elle est perpendiculaire sur *cd* qui est horizontale; mais *eb* est seulement perpendiculaire sur *gf* ou *bf*, parce que ces deux dernières droites ne sont pas horizontales.

Des Lignes parallèles.

Nous avons déjà vu que deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont à égale distance l'une de l'autre dans toute leur longueur; telles sont les droites *ab*, *cd* (fig. 8, pl. I). Si ces deux parallèles sont coupées par une troisième droite *ef* nommée *sécante*, il est évident que cette droite sera inclinée sur *ab* de la même manière qu'elle le sera sur *cd*; par conséquent, les angles qu'elle formera avec *ab* seront égaux aux angles correspondans qu'elle formera avec *cd*. Ces angles seront au nombre de huit, quatre autour du point *g*, et quatre autour du point *h*. Les angles *age*, *bge*, *chf*, *dhf*, qui sont en dehors des parallèles, sont nommés angles *externes*; et les quatre angles *agf*, *bgf*, *che*, *dhe*, qui sont en dedans de ces mêmes parallèles, sont appelées angles *internes*. Si nous comparons l'angle *age*, qui est à gauche de la sécante *ef*, avec l'angle *dhf*, qui est à droite de la même sécante, nous verrons que ces deux angles sont égaux; car *eg* est inclinée sur *ab* de la même quantité que *fh* l'est sur *cd*; et comme ces angles sont placés alternativement l'un à droite et l'autre à gauche de la sécante, on les a

nommés *alternes* l'un à l'égard de l'autre : et si ces angles sont en dehors des parallèles, on les nomme *alternes externes ;* si au contraire ces angles sont compris entre les parallèles, comme *agf*, *dhe*, on les nomme *alternes internes*. Il y a donc quatre angles alternes externes, et quatre angles alternes internes. L'angle *age*, ainsi que nous l'avons vu, égale l'angle *dhf*, et l'angle *egb* égale l'angle *fhc*; et comme il en est de même pour les quatre angles alternes internes, il s'ensuit que *les angles alternes externes et internes sont égaux*.

Les angles qui, comme *fhd*, *fgb*, sont placés d'un même côté de la sécante, sont évidemment égaux, et sont nommés *angles correspondans*. Donc, *si deux angles tournés d'un même côté ont leurs côtés parallèles chacun à chacun, ces angles seront égaux*.

Des Surfaces planes en général.

Une surface plane terminée par des lignes droites que l'on appelle *côtés* se nomme en général *figure rectiligne* ou *polygone*. Les figures de ce genre se distinguent les unes des autres par le nombre de leurs côtés ou de leurs angles, ainsi que par les relations que ces côtés et ces angles peuvent avoir entre eux. Lorsqu'un polygone a trois côtés et par conséquent trois angles, on le nomme *triangle ;* lorsqu'il en a quatre, *quadrilatère ;* cinq, *pentagone;* six, *exagone;* sept, *eptagone;* huit, *octogone;* neuf, *ennéagone ;* dix, *décagone ;* onze, *endécagone ;* douze, *dodécagone*. Passé ce nombre, on désigne les figures par le nom numérique français de leurs côtés.

Des Triangles.

Le triangle est la plus simple de toutes les surfaces ; car il ne faut pas moins de trois lignes pour en terminer une de toutes

parts. Cette surface aura donc trois côtés, et par conséquent trois angles, ce qui lui a fait donner le nom de triangle. Cette figure, si simple en apparence, est une des plus fécondes en propriétés.

On distingue dans un triangle quelconque ABC (fig. 9), 1° la *base* AB, qui est un des côtés sur lequel on conçoit ce triangle appuyé (tous les côtés peuvent également servir de base); 2° le *sommet* C, qui est l'angle opposé à la base; 3° la *hauteur* CD, qui est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, prolongée s'il est nécessaire, ainsi que nous le verrons bientôt.

Considérons d'abord un triangle sous le rapport de ses côtés.

Lorsqu'un triangle ABC a ses trois côtés égaux, on le nomme *équilatéral;* s'il n'a que deux de ses côtés égaux comme abc, on l'appelle *isocèle;* enfin, s'il a ses trois côtés inégaux comme *abc*, il se nomme *scalène*.

Si nous considérons le triangle par rapport à ses angles, il peut avoir, 1° ses trois angles aigus comme ABC; alors on le nomme *acutangle;* 2° un angle droit comme c dans le triangle abc; on le nomme triangle *rectangle;* 3° enfin, un angle obtus tel que *c* dans le triangle *abc*, et on l'appelle triangle *obtusangle*.

Si par le sommet C d'un triangle quelconque (fig. 10, pl. I), nous menons une droite *de* parallèle au côté opposé AB, nous aurons les angles de suite *d*CA, ACB, BC*e*, qui vaudront deux angles droits ainsi que nous l'avons déjà vu. Nous pouvons donc considérer AC comme étant une sécante comprise entre deux parallèles AB, *de*; nous aurons donc l'angle *d*CA égalant son alterne interne CAB. Considérons de la même manière le côté BC, c'est-à-dire comme étant une autre sécante, nous aurons l'angle *e*CB égalant l'angle alterne interne B; ces deux angles A, B, auront donc pour supplément l'angle ACB : or les trois angles faits sur la droite *de* autour du point C valent deux angles droits; et comme ces trois angles sont égaux aux trois angles du triangle, leur somme sera

donc la même. Cette propriété est commune à tous les triangles. Donc *la somme des trois angles d'un triangle quelconque vaut deux angles droits*.

Si, dans un triangle *abc*, les angles *a*, *b*, sont égaux aux angles correspondans A, B, d'un autre triangle, le troisième angle *c* sera égal à l'angle C, puisque la somme des trois angles dans ces deux triangles vaudra également pour chacun deux angles droits; donc, *si deux angles d'un triangle sont égaux, chacun à chacun, aux deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un sera égal au troisième angle de l'autre;* donc, si l'on connaît deux angles d'un triangle quelconque, on connaîtra nécessairement le troisième, puisque le troisième sera le supplément des deux autres.

Dans tous les triangles que nous venons de voir, nous pouvons remarquer que le plus grand côté est toujours opposé au plus grand angle; et, comme dans un triangle équilatéral les trois côtés sont égaux, il s'ensuit que les trois angles qui leur sont opposés sont aussi égaux. Donc, *dans un triangle quelconque, le plus grand côté est toujours opposé au plus grand angle, le moyen côté au moyen angle, le plus petit côté au plus petit angle,* et réciproquement.

Si nous prolongeons un des côtés d'un triangle quelconque, par exemple le côté BC, vers *f*, l'angle *f*CA, formé par le prolongement C*f* et par le côté CA, se nomme *angle extérieur:* il est évident que l'angle *f*C*d* égale l'angle B, et l'angle *d*CA égale l'angle A; donc l'angle extérieur *f*CA égale les deux angles A, B; donc *l'angle extérieur d'un triangle quelconque, vaut la somme des deux angles intérieurs qui lui sont opposés.*

Puisque la somme des trois angles d'un triangle quelconque vaut celle de deux angles droits, un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit, et les deux autres ne vaudront ensemble qu'un angle droit; par conséquent chacun d'eux sera un angle aigu. Dans un

triangle rectangle comme est celui-ci dont l'angle B est droit, le plus grand côté AC se nomme *hypothénuse*. Si un triangle ne peut avoir qu'un angle droit, à plus forte raison il ne pourra avoir qu'un angle obtus, et les deux autres vaudront ensemble moins qu'un angle droit.

De l'Égalité des triangles.

1°. Si les trois côtés d'un triangle ABC (fig. 10) sont égaux aux trois côtés d'un autre triangle *abc*, ces deux triangles seront parfaitement égaux, puisque de l'égalité des côtés résulte nécessairement l'égalité des angles; donc *deux triangles sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont leurs côtés égaux.*

2°. Si l'angle A égale l'angle *a*, si le côté AB égale le côté *ab*, et si le côté AC égale le côté *ac*, le troisième côté BC égalera nécessairement le côté *bc*; ces deux triangles seront donc égaux. Donc *deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux.*

3°. Si l'angle A égale l'angle *a*, l'angle B égale l'angle *b*, et que le côté AB égale le côté *ab*, le côté AC sera incliné sur AB, autant que le côté *ac* le sera sur *ab*; semblablement, l'inclinaison de CB sur AB sera la même que celle de *cb* sur *ab*; ces deux triangles seront donc égaux : donc *deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux angles égaux sur des côtés égaux.*

De ces trois caractères d'égalité, on déduit trois manières de construire un triangle égal à un autre triangle donné : 1° en faisant les trois côtés de l'un égaux aux trois côtés de l'autre; 2° en donnant au second un angle égal compris entre côtés égaux; 3° en faisant deux angles égaux sur des côtés égaux. Ces trois moyens sont également bons; mais dans la pratique on doit préférer le premier, comme le moins susceptible d'erreur, ce que nous verrons par la suite.

Des Polygones d'un plus grand nombre de côtés.

Lorsque deux côtés *ab*, *bc* d'un polygone (fig. 11) forment un angle dont le sommet *b* est tourné vers l'intérieur de la figure, cet angle se nomme *angle rentrant*, et ceux dont le sommet est en dehors, comme *adc*, se nomment *angles saillans*.

Si dans un polygone quelconque on mène une droite *bd* d'un angle à l'autre, cette ligne se nomme *diagonale*. Il est évident, 1° que le triangle ne peut avoir de diagonale; 2° que les diagonales menées d'un angle à tous les autres angles, divisent le polygone en triangles; 3° que le premier triangle *abd*, et le dernier *cbd*, emploient chacun deux côtés du polygone, ce qui fait que le nombre des triangles égalera nécessairement celui des côtés moins deux, ce qui a lieu dans tous les polygones divisés ainsi. Donc, *si, de l'un des angles d'un polygone, on mène des droites à tous les autres angles, le polygone se trouvera divisé en autant de triangles moins deux que le polygone a de côtés.*

Nous pouvons encore diviser un polygone en triangles, en menant d'un point *z* pris à volonté dans l'intérieur de la figure, à chacun des autres angles, des droites z^a, z^b, z^c, z^d, etc. Nous voyons que dans ce cas chaque triangle n'emploie qu'un des côtés de la figure, par conséquent il y aura autant de triangles que la figure aura de côtés. Donc, *si d'un point pris à volonté dans l'intérieur d'un polygone, on mène à chacun des angles autant de droites, le polygone se trouvera divisé en autant de triangles que lui-même aura de côtés.*

Un polygone qui a tous ses côtés égaux, est dit *équilatéral*, et s'il a tous ses angles égaux, il se nomme *équiangle*, tandis qu'un polygone qui a tous ses côtés et ses angles inégaux, est nommé *irrégulier*. Un polygone dont les côtés opposés sont de deux en deux égaux, s'appelle *symétrique* : enfin un polygone

dont tous les angles et tous les côtés sont égaux, est un *polygone régulier.*

Lorsqu'un quadrilatère a ses côtés et ses angles égaux, on le nomme *carré* (fig. 12); lorsqu'il a ses côtés inégaux et ses quatre angles droits, on l'appelle *rectangle* (fig. 13); lorsqu'il a ses côtés égaux et qu'il n'a pas d'angles droits, on le nomme *rhombe* ou *losange* (fig. 14); lorsqu'il est symétrique, il prend le nom de *parallélogramme* (fig. 15); celui dont deux côtés ne sont pas parallèles, quoique égaux, s'appelle *trapèze* (fig. 16); enfin celui dont les côtés ainsi que les angles sont inégaux, retient le nom de *quadrilatère* (fig. 17).

Des Polygones réguliers.

Quoique les triangles et les quadrilatères soient de vrais polygones, on ne donne ordinairement ce nom qu'aux figures qui ont plus de quatre côtés, et il suit de la définition du polygone régulier, que nous pouvons le considérer comme formé de triangles isocèles et égaux placés autour d'un point z nommé *centre du polygone* (fig. 9, 12, 18, 19, etc.), de manière à ce que l'espace angulaire autour du point z soit entièrement rempli, et que les bases ou côtés ab, bc, cd, etc., se joignent par leurs extrémités; or, comme ces triangles sont isocèles, les angles de leurs bases seront égaux, ainsi que ces mêmes bases; donc *un polygone régulier est celui dont tous les côtés et les angles sont égaux.*

Si les triangles AzB (fig. 9), BzC, CzA sont égaux et isocèles, en sorte qu'on ait AB égale BC égale CA, et si, de plus, chacun des angles en z vaut le tiers de quatre angles droits, ces trois triangles réunis formeront le grand triangle équilatéral ABC, qui sera régulier, équilatéral et équiangle.

Avec quatre triangles égaux et isocèles, nous formerons le carré (fig. 12), dont chacun des angles en z vaudra un angle droit;

il en sera de même des autres polygones réguliers, quel que soit le nombre de leurs côtés; c'est-à-dire que chacun des angles au centre vaudra le tiers, le quart, le cinquième, etc., de quatre angles droits. D'où il suit que si on divise en deux parties égales les angles d'un polygone régulier quelconque par des droites A*z*, B*z*, C*z*, etc., ces droites se réuniront en un point *z*, qui peut être considéré comme étant le sommet commun de tous les triangles qui forment le polygone; et comme ce point est également éloigné des angles, ainsi que des côtés, on le nomme le *centre du polygone*. Si l'on prolonge la droite *dz* (fig. 18) jusqu'en *f*, le triangle *azb* se trouvera partagé en deux parties égales, mais *zf* n'est que le prolongement de *dz*; et comme ceci est commun à tous les polygones réguliers, il en résulte que *dans un polygone régulier, une droite qui passe par l'un des angles et par le centre, divise le polygone en deux parties égales.*

Dans l'exagone (fig. 19), les six angles du centre *z* valent ensemble quatre angles droits; il est clair que chacun d'eux vaudra deux tiers d'angle droit; les deux autres angles de chacun des triangles isocèles vaudront ensemble quatre tiers d'angle droit, par conséquent chacun deux tiers. Ces angles sont donc égaux entre eux, par conséquent chacun des triangles est équilatéral; donc *le côté de l'exagone régulier est égal à la droite menée du centre à l'un de ses angles.*

Dans un polygone régulier (fig. 18), la distance du centre à chacun des angles se nomme *rayon oblique*, la perpendiculaire abaissée du centre sur chacun des côtés, se nomme *rayon droit*, ou *apothème*. On y distingue aussi plusieurs espèces d'angles: 1° l'angle formé par deux côtés contigus, comme l'angle *abc*, etc., que l'on nomme *angle du polygone*; 2° l'angle formé par deux rayons obliques *az*, *bz*, ou l'angle *azb*, qu'on appelle *angle au centre*; 3° l'angle compris entre un côté quelconque du polygone et le rayon oblique, comme l'angle *zab*, nommé *angle sur la base.*

Des Raisons, Proportions et Progressions des Lignes droites (fig. 20, 21, 22, 23, pl. I).

Lorsque nous comparons entre elles deux grandeurs ou quantités de même espèce, nous pouvons avoir pour objet deux motifs différens : 1° de connaître de combien l'une surpasse l'autre ou en est surpassée; 2° ou bien de savoir combien de fois l'une contient l'autre ou est contenue dans cette autre. Ainsi lorsque nous comparons 1 à 2, nous trouvons que 2 surpasse 1 de 1, ou que 1 est surpassé par 2, de 1. 1 est donc la différence ou le *rapport* qu'il y a entre ces deux grandeurs : ce rapport est nommé plus particulièrement *raison* (qui vient de comparaison).

Si nous comparons ces deux nombres ou grandeurs pour savoir combien de fois 2 contient 1, ou bien 1 est contenu dans 2, nous trouverons également 2 ; ce nombre 2 est donc le rapport ou la raison qu'il y a entre le contenu 1 et le contenant 2; nous voyons donc qu'il y a double rapport entre deux grandeurs de même espèce ; le premier de ces rapports est nommé *rapport arithmétique ;* et le second, *rapport géométrique.* Ainsi nous voyons que pour avoir le rapport arithmétique de deux grandeurs, il faut soustraire la plus petite de la plus grande, et que pour avoir le rapport géométrique, il faut diviser l'une par l'autre. Nous pouvons donc considérer le premier de ces rapports comme un rapport de soustraction ou de différence, et le second comme un rapport de division ou de quotient.

Les deux nombres d'un rapport se nomment *termes* du rapport : le premier de ces termes est nommé *antécédent ;* et le second, *conséquent;* ainsi, dans le rapport de 2 à 1, 1 est l'antécédent et 2 est le conséquent.

Ayant reconnu, par comparaison, que le rapport ou la différeuce de 1 à 2 est 1, nous pouvons chercher de même le rapport

de deux autres grandeurs : par exemple, celui de 3 à 4, et nous verrons que 3 est surpassé par 4 de 1, ou que 4 surpasse 3 de 1. Comparons maintenant ces deux rapports, nous verrons qu'ils sont égaux et que 4 surpasse 3 de la même quantité que 2 surpasse 1, et que le rapport ou la différence de ces quatre grandeurs, comparées deux à deux, est également 1; 1 est donc en rapport avec 2 comme 3 est en rapport avec 4. Ces quatre grandeurs, ainsi comparées, forment ce qu'on appelle une *proportion arithmétique*.

Ayant aussi trouvé que le rapport géométrique de 1 à 2 est 1, cherchons un même rapport dans deux autres grandeurs; par exemple, 3 à 6 : nous trouverons que 3 est contenu dans 6 deux fois, ou de la même manière que 1 est contenu dans 2; ces deux rapports sont donc les mêmes; donc 1 est à 2 comme 3 est à 6, ce qui forme une *proportion géométrique*. Il y a donc deux sortes de proportions, une proportion arithmétique et une proportion géométrique.

Une proportion est donc composée de deux membres : l'un exprime le rapport ou la raison qui est entre les deux premiers nombres 1 et 2, l'autre exprime la raison qui est entre les deux derniers 3 et 4. Chaque membre est composé d'un antécédent et d'un conséquent; l'antécédent du premier membre est nommé *premier antécédent*, et le conséquent du même membre se nomme *premier conséquent*. Ceux du second membre sont nommés *second antécédent* et *second conséquent*. Ainsi dans la proportion arithmétique, 1 est à 2 comme 3 est à 4, ce que l'on exprime ainsi, 1 : 2 :: 3 : 4; 1 est premier antécédent et 3 deuxième antécédent; 2 est premier conséquent et 4 second conséquent; et dans la proportion géométrique, que l'on indique ainsi, 1 : 2 :: 3 : 6, c'est la même chose.

Le premier et le dernier termes d'une proportion sont nommés les *extrêmes*; le second et le troisième, qui sont au milieu, se

nomment les *moyens*. Ainsi, dans la première de ces proportions, 1 et 4 sont les extrêmes, et 2 et 3 les moyens; dans la seconde, 1 et 6 sont les extrêmes, et 2 et 3 les moyens.

Quatre quantités sont en proportion arithmétique, lorsque la somme des extrêmes égale celle des moyens; et quatre quantités sont en proportion géométrique, lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Ainsi, dans le premier cas, la somme des extrêmes 1 et 4 font 5, et celle des moyens 2 et 3 font également 5; dans la proportion géométrique, le produit des extrêmes 1 multiplié par 6 égal 6, et le produit des moyens 2 multiplié par 3 donne également 6. Comme nous n'aurons aucune occasion de faire l'application des règles des proportions arithmétiques, nous ne nous occuperons que des proportions géométriques, dont la connaissance nous est indispensable.

De cette propriété, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, il résulte qu'il sera bien facile de trouver un terme d'une proportion, lorsqu'on connaîtra les trois autres : il suffira de se rappeler (ou de savoir) que quand on divise un produit par un des facteurs, on a pour quotient l'autre facteur; c'est-à-dire (pour ceux qui pourraient n'être pas familiarisés avec la division), que si nous multiplions 6 par 1, en disant une fois 6 est 6, 6 sera le produit de la multiplication, et 6 et 1 seront les *facteurs* de ce produit. Maintenant, si nous divisons ce produit 6 par le facteur 1, en disant dans 6 combien de fois 1, nous trouvons qu'il y est 6 fois; or ce quotient 6 est l'autre facteur que nous avons retrouvé. Donc si nous divisons le produit des extrêmes par un des extrêmes, nous aurons pour quotient l'autre extrême; et si nous divisons le produit des moyens par un des moyens, nous aurons pour quotient l'autre moyen. Mais le produit des extrêmes étant le même que celui des moyens, nous pourrons prendre l'un pour l'autre.

Donc, si l'on divise le produit des moyens par un des extrêmes,

on aura pour quotient l'autre extrême; et si l'on divise le produit des extrêmes par un des moyens, on aura l'autre moyen pour quotient. Donc, si l'un des extrêmes est inconnu, pour le trouver on multipliera les moyens, et l'on divisera leur produit par l'extrême connu; et si c'est un des moyens qui est inconnu, on multipliera les extrêmes, et on divisera leur produit par le moyen connu : le quotient sera le moyen inconnu.

Par exemple, si, dans la proportion géométrique 1 : 2 :: 3 : 6, nous ne connaissions que ces trois termes, 1 : 2 :: 3 : x (nous désignerons toujours l'inconnu par un x), nous multiplierions les deux termes moyens 2 et 3 en disant deux fois 3 font 6, que nous diviserons par l'autre terme 1, en disant dans 6 combien de fois 1 ; nous trouverons qu'il y est six fois; le quotient 6 sera la valeur de x, ou le quatrième terme inconnu de la proportion. Il en serait de même de l'autre extrême 1, ainsi que des moyens 2, 3.

Nous pouvons considérer une proportion dans un sens inverse, et même renverser chaque membre, sans détruire la proportion; nous aurons seulement une proportion qui sera l'inverse de la précédente; ainsi 6 : 3 :: 2 : 1 est l'inverse de 1 : 2 :: 3 : 6, de même que 2 : 1 :: 6 : 3, ce qui ne change pas ses rapports, car 6 contient 3 comme 2 contient 1, et 2 contient 1 comme 6 contient 3. Lorsqu'une proportion n'est pas inverse, on la nomme *directe*. Une proportion est directe quand ses rapports vont en augmentant, et elle est *inverse* quand ses rapports vont en diminuant.

Une proportion pourrait n'être composée que de trois nombres, par exemple, 1 : 2 :: 2 : 4, où nous voyons que 2 est commun aux deux membres et est à la fois premier conséquent et second antécédent. Dans ce cas, ces deux nombres se lient donc; par conséquent, il est inutile de répéter le chiffre 2 deux fois : ces sortes de proportions sont nommées *proportions continues*, et s'ex-

priment ainsi, ∺ 1 : 2 : 4, ce qui veut dire : comme 1 est à 2, 2 est à 4. Dans toute proportion continue, le premier terme est donc avec le second comme le deuxième est avec le troisième; par cette raison, le second terme est nommé *moyen proportionnel*. *Voyez* les figures 20, 21, 22, 23 (pl. 1), où ces différentes proportions sont exprimées en chiffres, en lettres et en lignes.

Ayant fait cette proportion continue, 1 : 2 :: 2 : 4, nous pouvons continuer de cette manière 4 : 8 : 16, etc. Un pareil continu est ce qu'on appelle *progression*, et on nomme *moyens proportionnels* tous les termes qui se trouvent entre deux termes donnés. Ainsi, dans la proportion continue, 1:2::2:4::4:8::8:16; 2, 4, 8 sont des moyens proportionnels entre 1 et 16, ce que l'on exprime ainsi; ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16, etc.

Soient *ab*, *cd* (pl. 2, fig. 1[re]) deux droites parallèles, entre lesquelles nous mènerons à volonté plusieurs droites ou sécantes, telles que *ef*, *em*, *eg*, etc. Puisque l'espace compris entre ces parallèles est partout égal, il est évident que par tous les points, tels que *h*, 2, pris arbitrairement sur l'une de ces sécantes, nous ne pourrons mener ni plus ni moins de parallèles sur *em* que sur les autres sécantes, comme, *eg*, etc.; et que le même nombre de parallèles qui couvrirait tous les points de *ef*, couvrirait aussi tous les points des autres sécantes, puisque ces sécantes embrassent tout l'espace compris entre les deux parallèles, et que cet espace, partout égal dans sa hauteur, ne peut pas contenir plus de lignes parallèles dans un endroit que dans un autre. Par conséquent, si une de ces parallèles, telle que *ik*, coupe *ef* au tiers de sa longueur, elle coupera également *em*, *eg*, etc., au tiers de la leur; *eh* sera donc le tiers de *ef*, comme *el* sera le tiers de *eg*; nous aurons donc *eh* : *ef* :: *el* : *eg*, *eh* : *el* :: *ef* : *eg*. Il est aisé de voir qu'il en serait de même de la moitié, du quart, du dixième, du centième, etc., de *ef* ou de *eg* : ces deux droites seront donc coupées proportionnellement. Donc, *si plusieurs droites comprises*

entre deux parallèles sont coupées par une troisième parallèle, leurs parties seront proportionnelles.

Des Figures semblables.

Nous avons vu jusqu'ici que plusieurs droites ne diffèrent entre elles que par leurs grandeurs; mais cette différence d'égalité ne les empêche pas d'être semblables : deux droites peuvent donc être semblables sans être égales, ce qu'il ne faut pas confondre.

Nous allons voir qu'il en est de même des figures ou polygones : par exemple, lorsque nous regardons un portrait en miniature, nous pouvons le trouver très ressemblant à l'original, quoique beaucoup plus petit; ces deux figures sont donc semblables sans être égales : il en sera de même des plans d'architecture, des cartes géographiques, etc. Voyons maintenant en quoi consiste la ressemblance de deux figures, et appliquons d'abord aux triangles les vérités fondamentales que nous venons d'énoncer.

La droite *eh* (fig. 1) est évidemment inclinée sur *hl* de la même quantité ou de la même manière que *ef* l'est sur *fg*; donc (à cause des parallèles), l'angle *efg* égale l'angle *ehl*, et la droite *el* est inclinée sur *hl* comme *eg* l'est sur *gf*; donc l'angle *egf* égale l'angle *elh*, puisque les deux angles que nous venons de voir sont communs aux deux triangles *feg*, *hel*, ainsi que le troisième angle *feg*; les trois angles de ces deux triangles seront donc égaux, ces deux triangles seront donc semblables. Donc *deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles correspondans égaux.*

Dans ces deux triangles, les angles formés sur la base étant respectivement égaux, il est évident que le troisième, qui est supplément à deux angles égaux, sera aussi égal dans l'un et dans l'autre triangle; et comme nous avons déjà vu que ces deux triangles sont semblables, nous en conclurons que *deux triangles*

d'inégale grandeur, qui ont deux angles sur leur base respectivement égaux, sont semblables.

Nous avons déjà vu que les parties de *ef* étaient proportionnelles aux parties de *eg*, par conséquent les côtés *eh*, *el* du petit triangle seront proportionnels aux côtés *ef*, *eg* du grand triangle; puisque les deux côtés de ces triangles sont proportionnels, le troisième de l'un le sera nécessairement au troisième de l'autre; donc *eh* est à *hl* comme *ef* est à *fg*; donc, *quand deux triangles sont semblables, les côtés du premier sont proportionnels chacun aux côtés homologues ou correspondans du second.* Donc, *si l'on coupe deux des côtés d'un triangle par des parallèles à la base ou au troisième côté, ces côtés seront coupés proportionnellement.*

Puisque les côtés de deux triangles semblables sont proportionnels, *eh* est à *hl* comme *ef* est à *fg*; donc, si *eh* est le tiers de *ef*, *hl* sera le tiers de *fg*; mais *hl* est la base du petit triangle comme *fg* est la base du grand; donc, *si un triangle est coupé par le milieu, le tiers, ou le quart, par une droite parallèle à sa base, cette droite sera la moitié, le tiers, ou le quart de la base.*

Considérons maintenant *ef*, *eg* comme étant les côtés d'un angle quelconque; supposons le côté *ef* divisé en un nombre aussi quelconque de parties égales ou inégales; si par chacun des points de division 1, 2, 3, etc., nous menons des droites parallèles entre elles jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre côté *eg*, il est évident, d'après ce que nous venons de dire, que les parties de *eg* seront proportionnelles aux parties de *ef*; nous aurons donc $eh : el :: e2 : e4 :: ef : eg$; $eh : el :: ef : eg$, ou bien, puisque *eg* est double de *ef*, $1 : 2 :: 2 : 4 :: 3 : 6$, et $1 : 2 :: 3 : 6$; d'où il suit que *si un des côtés d'un angle quelconque est divisé en parties égales ou inégales, et que par chacun des points de division l'on mène à l'autre côté des parallèles entre elles, cet autre côté sera divisé en parties proportionnelles aux premières.*

Si d'un angle quelconque *e* d'un triangle *efg* nous menons

une droite *em* au côté opposé *fg*, et que par un point *h* pris à volonté sur l'un des deux autres côtés, nous menions une droite *hl* parallèle à *fg*, nous aurons quatre triangles semblables chacun à chacun ; car le triangle *efm* est semblable au triangle *ehn*, et le triangle *egm* est semblable au triangle *eln*. De plus, les côtés de ces triangles seront coupés proportionnellement; ainsi la droite *hl* se trouvera coupée par *em* en même nombre de parties que la base *fg* : or, puisque nous avons vu que *hl* est proportionnelle à *fg*, les parties de *hl* seront donc aussi proportionnelles aux parties de *fg*; nous aurons donc : *hn* : *hl* :: *fm* : *fg*, *hl* : *hn* :: *fg* : *fm*; d'où il suit que *si, d'un point pris à volonté hors d'une droite, on mène à différens points de cette droite plusieurs autres droites, toute parallèle à cette droite coupera ces autres droites en parties proportionnelles*.

La solution de plusieurs problèmes très utiles et fréquemment employés, découle de ce que nous venons de dire sur les proportions. C'est ce que nous verrons à la fin de ces principes.

Du Cercle et de la Ligne circulaire (pl. 2, fig. 2).

Si une droite AB tourne toujours dans un même plan et sur une de ses extrémités B, cette ligne, en passant successivement par les points C, D, E, F, etc., jusqu'à son point de départ A, aura décrit une surface terminée par une ligne courbe dont tous les points seront nécessairement à une égale distance du point B: l'espace renfermé par cette courbe est nommé *cercle;* et la courbe ACDEFA, qui termine ce cercle, s'appelle *circonférence du cercle,* le point B, qui se trouve à une égale distance de tous les points de la circonférence, et par conséquent occupe le milieu de la figure, se nomme *centre du cercle*; et toute droite comme AB, qui va du centre à la circonférence ou de la circonférence au centre, est nommée *rayon du cercle*.

Il est évident que le rayon AB, en décrivant la surface du cercle, aura décrit autant de cercles qu'on aurait pu prendre de points sur cette ligne: par exemple, le point *a* (que nous pouvons considérer comme l'extrémité de la droite *a*B) qui, pendant le mouvement de la droite AB, aura décrit le cercle *acdefa* : il est évident que tous les rayons de ce nouveau cercle seront égaux entre eux, ainsi que le sont ceux du grand cercle, puisqu'ils mesurent les uns et les autres la distance du centre à la circonférence; donc, *dans un même cercle tous les rayons sont égaux*. Toute droite comme AE, DF, qui, passant par le centre, rencontre la circonférence en deux points, se nomme *diamètre* : or comme tous les rayons sont égaux entre eux, et qu'un diamètre est double du rayon, il s'ensuit que *dans un même cercle, tous les diamètres sont égaux.*

Toute droite AB, ab (fig. 3) qui coupe la circonférence en deux points et qui sort de cette circonférence, s'appelle *sécante,* et la portion DE ou *de*, comprise dans le cercle, entre les deux points de la circonférence, est nommée *corde*. Il est clair que plus une corde sera éloignée du centre, moins elle sera grande; nous pouvons donc, dans un même cercle, considérer le diamètre comme la plus grande de toutes les cordes. La portion de circonférence déterminée par une corde comme *dfe*, se nomme *arc de cercle :* il nous sera facile de voir que le diamètre DE coupe le cercle en deux parties égales, par conséquent les arcs D*f*E, D*g*E sont égaux. Il est évident que si les cordes *de*, *hi* sont également éloignées du centre *c*, ces cordes seront égales, et les arcs qu'elles soutiennent seront égaux; donc, *dans un même cercle, des cordes égales soutiennent des arcs égaux.*

La partie *kf* d'un rayon comprise entre la corde et la circonférence, se nomme *flèche*. Les portions de cercle comprises entre une corde et un arc, telles que *dfed*, *hgih*, sont nommées *segmens de cercle;* et lorsque le diamètre est considéré comme corde, les

deux segmens sont égaux : autrement il y a un grand et un petit segment; ainsi *dDgEed* est un grand segment, et *dfed* est un petit segment. La portion de cercle comprise entre deux rayons, comme C*dfe*C, se nomme *secteur de cercle;* ce dernier est nommé *petit secteur,* par rapport au grand secteur C*dge*C.

Concevons le diamètre DE (ou la sécante AB) s'éloignant du centre C, vers *f*, sans cesser d'être perpendiculaire au diamètre *gf*; lorsque cette ligne sera arrivée en *f*, elle ne touchera plus la circonférence qu'en un seul point : on la nomme alors *tangente,* ainsi *ab* est une tangente, et le point d'attouchement *f* s'appelle *point de tangence.* Or, comme cette droite n'a pas cessé d'être perpendiculaire au rayon C*f*, et comme de chacun des points de la circonférence on peut mener un rayon et, par conséquent, une tangente, il s'ensuit qu'*une tangente à un point quelconque de la circonférence est toujours perpendiculaire au rayon qui passe par ce point,* et réciproquement.

Si, par les extrémités d'une corde *de*, on mène deux rayons *d*C, *e*C, ces rayons étant égaux forment avec la corde un triangle isocèle : il est évident que si, du sommet C, on abaisse une perpendiculaire sur la base *de*, elle coupera en deux parties égales au point *k*, la corde ainsi que l'angle *d*C*e* et l'arc *dfe*; d'où il suit qu'*une perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre du cercle et par le milieu de l'arc soutenu par cette corde.*

Les deux tangentes *ab*, *lm* peuvent être considérées comme deux cordes qui se sont éloignées successivement du centre C et ont par conséquent diminué de longueur jusqu'à zéro, sans cesser pour cela d'être perpendiculaires au diamètre *gf*; et comme ce diamètre divise le cercle en deux parties égales, il s'ensuit que les arcs *g*D*f*, *g*E*f*, compris entre ces parallèles, sont égaux. Or nous avons vu précédemment que les arcs *fd*, *fe*, *gh*, *gi* étaient égaux; donc si nous retranchons ces arcs des deux demi-cercles,

les restes seront égaux; mais ces restes *dh*, *ei* seront des arcs compris entre les parallèles *hi*, *de*. Nous pourrions faire le même raisonnement sur d'autres arcs aussi compris entre des parallèles, et nous aurions toujours le même résultat; donc, *dans un même cercle, des cordes parallèles interceptent des arcs égaux*.

Des Angles considérés dans le cercle, et de leur Mesure (fig. 3).

Puisque les cordes *de*, *hi* sont égales et qu'elles sont les bases de deux triangles *d*C*e*, *h*C*i* égaux et semblables, l'angle *d*C*e* égale l'angle *h*C*i*; et puisque ces cordes soutiennent des arcs égaux, réciproquement des arcs égaux doivent comprendre des angles égaux, c'est-à-dire que l'arc *dfe* comprend l'angle *d*C*e*, comme l'arc *hgi* comprend l'angle *h*C*i*: il y a donc un rapport entre les arcs et les angles qui ont leur sommet au centre du cercle; nous aurons donc: l'arc *dfe*: l'angle *d*C*e* :: l'arc *hgi* : l'angle *h*C*i*; donc, *dans un même cercle, les angles dont le sommet est au centre sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés*.

Puisqu'il y a un rapport entre les arcs et les angles, il est facile d'entrevoir qu'on peut considérer les arcs comme étant propres à mesurer les angles. Supposons d'abord le rayon AB (fig. 2) tournant sur son centre B, et s'élevant par son extrémité A, jusqu'en C, il sera évident que nous aurons un angle aigu ABC, qui comprendra entre ses côtés l'arc AC; lorsque l'extrémité du même rayon sera en D, nous aurons l'angle droit ABD, ayant entre ses côtés l'arc AD; lorsque cette extrémité sera en E, nous aurons le diamètre AE, et pour arc la demi-circonférence ADE; et lorsque le même rayon sera en F, nous aurons les trois quarts de la circonférence; enfin lorsque ce même rayon sera arrivé en A, point de son départ, il aura décrit la circonférence entière. Nous devons remarquer que par ce mouvement les arcs ont augmenté en raison directe des angles, et que les deux diamètres AE, DF,

étant perpendiculaires entre eux, partagent la circonférence : en quatre parties égales et forment par conséquent quatre angles droits dont chacun d'eux vaut le quart de la circonférence : l'arc AD peut donc être considéré comme propre à mesurer l'angle droit ABD; et puisque l'arc AC égale l'arc CD, ces deux arcs seront chacun la moitié du quart ou le demi-quart de la circonférence, et seront chacun la mesure du huitième de la circonférence.

Nous concevrons aisément que tous les points, tels que *a*, qu'on peut prendre sur le rayon AB, auront décrit autant de circonférences telles que *acdefa*, et nous voyons que toutes ces circonférences se trouveront divisées de même que la première, c'est-à-dire que l'arc *ac* sera la mesure du huitième de cette petite circonférence, de même que l'arc AC est la mesure du tiers de la grande; que l'arc *ad* mesure le quart de cette circonférence, ou l'angle *a*B*d*, comme l'arc AD mesure le quart de la grande circonférence, ou l'angle ABD : donc *un angle qui a son sommet au centre d'un cercle, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

Afin de pouvoir évaluer la valeur des angles, on est convenu de diviser toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales, qu'on nomme *degrés;* chaque degré en 60 parties aussi égales, appelées *minutes;* chaque minute en 60 parties nommées *secondes,* etc. Ainsi pour exprimer cinq degrés trois minutes deux secondes, on écrit $5^\circ\ 3'\ 2''$. D'après cela, il est facile de voir que la valeur de l'arc AC, ou *ac*, moitié de l'angle droit AD ou *ad*, vaut 45°, puisque l'angle droit en vaut 90, qui est le quart de 360, nombre total des parties de la circonférence. Nous pourrons donc, d'après cela, mesurer un angle quelconque par le nombre des degrés de l'arc compris entre ses côtés. Observons, en passant, que l'angle *a*B*c* est le même que l'angle ABC, et que cependant les côtés *a*B, *c*B sont plus petits

que les côtés AB, CB. Donc, *la grandeur (ou l'ouverture) d'un angle ne dépend point de la longueur de ses côtés.*

Des Angles qui n'ont pas leur sommet au centre d'un cercle (fig. 4).

Nous venons de voir qu'un angle qui a son sommet au centre d'un cercle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés : voyons maintenant quelle serait la mesure de ce même angle, s'il avait son sommet à la circonférence du même cercle. Soit un angle quelconque ABC (que dans cet exemple nous ferons d'abord droit, afin de saisir plus facilement ce que nous allons en dire), formé par deux rayons, et dont le sommet B est au centre du cercle ; puisque cet angle est droit, il aura donc pour mesure l'angle compris entre ses côtés, qui, dans ce cas, est le quart de la circonférence, ou 90° ; concevons cet angle glissant le long du rayon B*b*, jusqu'à ce que son sommet B soit à la circonférence en *b*; il est évident que cet angle n'aura pas changé de nature, et qu'il est toujours un angle droit; ainsi l'angle *abc* égale l'angle ABC ; mais remarquons que l'angle *abc* comprend entre ses côtés l'arc *adc*, qui est la demi-circonférence ou un arc de 180°, et est par conséquent double de l'arc A*d*C, qui ne vaut que 90°, qui est la mesure de tout angle droit, ainsi que nous l'avons vu; donc l'angle *abc* ne vaut que la moitié de l'arc *adc* compris entre ses côtés; et comme cette propriété n'est pas particulière à l'angle droit, mais qu'elle est commune à un angle quelconque, nous en conclurons qu'*un angle qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Faisons glisser ce même angle ABC sur le prolongement de son côté AB, jusqu'à ce que son sommet B soit à la circonférence en *e*; cet angle, comme dans l'exemple précédent, n'aura pas changé de valeur, seulement le côté BC sera devenu la tangente

ef, perpendiculaire au rayon *e*B; cet angle comprend donc entre ses côtés *ef*, *e*A, l'arc *e*CA ou la demi-circonférence; il aura donc pour mesure la moitié de cet arc, ainsi que tout angle qui a son sommet à la circonférence. Donc *l'angle formé par une tangente et par une corde a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

De ce qui vient d'être dit il suit, 1° que tous les angles comme *abc*, *adc*, *aec*, etc. (fig. 5), qui comprennent entre leurs côtés le même arc *ahc* sont égaux, puisqu'ils ont pour mesure la moitié de cet arc; donc *tous les angles qui ont leur sommet à la circonférence, et qui sont soutenus par une même corde, sont égaux.*

2°. *Tout angle qui a son sommet à la circonférence et qui comprend entre ses côtés un arc plus petit que la demi-circonférence, est aigu,* puisqu'il a pour mesure la moitié d'un arc moindre que le quart de la circonférence, ou qu'un angle droit : tels sont les angles *abc*, *adc*, *aec*.

3°. *Tout angle à la circonférence, qui comprend entre ses côtés une demi-circonférence, est droit,* puisqu'il a pour mesure la moitié de cet arc ou le quart de la circonférence : tels sont les angles *fbg*, *fdg*, *feg*.

4°. Enfin, *tout angle à la circonférence* (comme *ahc*) *qui comprend entre ses côtés un arc plus grand qu'une demi-circonférence, est obtus,* puisqu'il a pour mesure un arc plus grand que le quart de la circonférence.

Des Polygones inscrits et circonscrits au cercle (fig. 6).

Si l'on partage une circonférence en un nombre quelconque de parties égales ou inégales, et que, par les points de division, on mène les cordes *ab*, *ac*, *bc*, etc., l'assemblage de ces cordes formera le contour d'un polygone dont tous les angles seront des

angles inscrits (c'est-à-dire ayant leur sommet à la circonférence) et qu'on nomme *polygone inscrit* : on dit aussi que cette circonférence est *circonscrite* à ce polygone, si, après avoir divisé une circonférence, on mène aux points de division *def* les rayons *gd*, *ge*, *gf*, et que par les extrémités de ces rayons on mène des perpendiculaires qui seront des tangentes et qui formeront par leur assemblage un polygone nommé *circonscrit* à cette circonférence. Nous voyons donc qu'il y a des polygones inscrits et circonscrits : commençons par les triangles.

Concevons dans un triangle quelconque *abc*, une droite *cd* qui divise un des angles en deux parties égales; les différens points que nous pouvons prendre sur cette droite, comme *g*, *h*, etc., seront les centres d'autant de circonférences dont chacune sera touchée par deux des côtés *ca*, *cb*. Il en sera de même des droites *ac*, *bf* relativement à l'angle *a* ou *b*. Si les droites *ae*, *cd* se rencontrent, leur point d'intersection *g* sera le centre d'une circonférence qui sera touchée par les trois côtés du triangle ; donc *un triangle quelconque peut être inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle.*

Un triangle quelconque étant inscrit comme *abc*, il est évident que l'angle *a* a pour mesure la moitié de l'arc *bc* compris entre ses côtés ; l'angle *b*, la moitié de l'arc *ac*; et l'angle *c*, la moitié de l'arc *ab*. Or ces trois arcs comprennent la circonférence ; donc leurs moitiés valent une demi-circonférence ou 180°, ce qui est une seconde preuve que *les trois angles d'un triangle quelconque valent deux angles droits.*

Nous avons déjà vu qu'il y a, dans un polygone régulier, un point unique qui est également éloigné de tous les côtés et de tous les angles, point qui est nommé *centre du polygone*. Les droites menées de chacun de ces angles à ce point seront donc égales. Il en sera de même des perpendiculaires abaissées de ce point sur chacun des côtés; d'où il suit que si nous faisons tourner sur le centre *g*

les droites *ag*, *fg*, les extrémités *a*, *f* de ces droites décriront chacune une circonférence dont l'une passera par les angles et l'autre par le milieu des côtés du polygone. Donc *un polygone régulier quelconque peut être inscrit ou circonscrit à un cercle.*

Si plusieurs cercles comme *abc*, *def* ont des rayons différens et un centre commun *g*, leurs circonférences seront nécessairement contenues les unes dans les autres, et alors on les nomme *cercles concentriques;* donc *des cercles sont concentriques lorsqu'ils ont des rayons différens et un centre commun.*

Du Rapport des droites relativement à la circonférence et au cercle (fig. 7).

Deux droites qui rencontrent une circonférence sont entre elles parallèles ou non parallèles. Dans le premier cas on ne peut rien dire sur le rapport qu'elles ont entre elles, sinon que *ab*:*cd*::*ab*:*cd*. Si *ab* est la moitié de *cd*, on aura 1 : 2 :: 1 : 2, ce qui n'apprendra rien. Considérons donc seulement deux droites qui, en rencontrant la circonférence, se rencontrent aussi elles-mêmes : et supposons d'abord que ces deux droites sont deux sécantes. Elles se couperont, ou sur la circonférence comme *cd*, *ed*, ou dans le cercle comme CD, BE, *cd*, *be* (fig. 8, 9), ou bien encore hors du cercle (fig. 10). Si elles se coupent sur la circonférence, on ne pourra rien dire encore sur leur rapport (fig. 7) *cd*:*de*::*cd*:*de*. Si elles se coupent dans le cercle comme CD, BE (fig. 8), il est facile de voir qu'en menant les droites BD, CE, les triangles ABD, ACE seront semblables; car les deux angles en *a* sont égaux comme opposés au sommet : l'angle E égale l'angle D, puisqu'ils sont inscrits et appuyés sur le même arc BC; on aura donc AB : AC ::AD : AE, et autres proportions semblables. Si l'on renverse le triangle ABD sur le triangle ACE, on verra que les deux côtés de ce triangle seront coupés proportionnellement par la droite

db, parallèle à EC, et on aura encore les mêmes proportions : si A*b* est un, AC deux, A*d* trois, AE sera nécessairement six. On aura donc 1 : 2 : : 3 : 6 ; donc, *si deux cordes ou sécantes se coupent dans le cercle, les quatre parties comprises entre le point d'intersection et la circonférence, sont réciproquement proportionnelles.*

Puisque cette proportion a lieu quelque part que soit le point d'intersection, et sous quelque obliquité que se coupent les cordes, elle doit encore avoir lieu lorsque les deux cordes sont perpendiculaires entre elles, et que l'une d'elles est un diamètre ; par exemple, *cd*, *be* (fig. 9), où l'on aura, comme dans l'exemple précédent, *ab* : *ac* : : *ad* : *ae* : mais comme *ad* égale *ae*, la proportion deviendra *ab* : *ac* : : *ac* : *ae*, où l'on voit que *ac* est moyenne proportionnelle entre *ab* et *ae*. Donc *la perpendiculaire, abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre.*

Si du point *c* on mène une droite à chacun des points *b*, *e*, on aura un triangle *bce*, qui sera rectangle en *c*, et dont le diamètre *be* sera l'hypoténuse ; et comme la perpendiculaire *ac* n'a pas changé, elle sera donc aussi proportionnelle entre les deux parties de l'hypoténuse. Donc, *si, de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux parties de cette hypoténuse.*

Si les deux sécantes se coupent hors du cercle comme *ad*, *ae* (fig. 10), ayant mené les droites *cd*, *be*, nous verrons, comme dans l'exemple ci-dessus, que les triangles *abe*, *acd* sont équiangles ; car l'angle *a* est commun à l'un et à l'autre, et l'angle *d* égale l'angle *e*, puisque ces deux angles sont inscrits, et qu'ils sont appuyés sur le même arc *bc* : nous aurons donc encore les mêmes proportions que dans l'exemple précédent : *ae* : *ad* : : *ab* : *ac*. Nous

voyons donc, dans cette proportion, que les parties de la sécante *ae* sont les extrêmes, et celles de la sécante *ad* sont les moyens; ce qui sera plus facile à saisir si nous plaçons ces deux triangles séparément dans une même position (fig. *z*), ce qui nous donne le même résultat que deux sécantes qui se coupent dans le cercle : c'est-à-dire que si deux sécantes se coupent dans le cercle ou hors du cercle, les parties comprises entre le point d'intersection et la circonférence, seront réciproquement proportionnelles. Donc, *deux sécantes qui se coupent hors d'un cercle sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

Concevons la sécante *ad* tournant sur *a* jusqu'à ce qu'elle soit tangente à la circonférence, alors les points *b* et *d* seront confondus en un seul point *d'*, et par là les deux parties *ab*, *db* de la sécante seront représentées par la tangente *ad'*. La proportion deviendra donc *ae* : *ad'* : : *ad'* : *ac*, où nous voyons que *ad'* est répété deux fois, et est par conséquent moyenne proportionnelle entre les deux parties de *ae*. Donc, *si une tangente et une sécante se rencontrent hors d'un cercle, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Des Plans.

De la Position des Lignes par rapport aux Plans (fig. 11).

Quoique les plans, dont nous allons parler, soient toujours terminés, il faudra les concevoir comme étant en général illimités dans leur étendue, et comme n'ayant point de figure déterminée, à moins que cela ne soit nécessaire.

Une droite ne peut rencontrer un plan que de deux manières : ou elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre sur ce plan, ou elle penche plus d'un côté que de l'autre. Dans le premier cas, on dit qu'elle est perpendiculaire à ce plan; et dans le second,

on dit qu'elle lui est inclinée ; ainsi *ab* est perpendiculaire au plan *cd*, et *ae* est inclinée à ce même plan. Imaginons un plan triangulaire passant par ces deux lignes, nous aurons le triangle rectangle *abe*, qui sera perpendiculaire au plan *cd*; concevons ce triangle tournant sur la ligne *ab* sans cesser d'être perpendiculaire à ce plan, il est aisé de voir que, dans sa révolution, la base *be* aura décrit un cercle, et aura passé successivement par tous les rayons qu'on pourrait mener dans ce cercle; tels sont les rayons 1*b*, 2*b*, 3*b*, etc. Il est évident que le côté *ab* n'a pas cessé d'être perpendiculaire à chacun de ces rayons comme il l'est encore à la base de ce triangle ou au rayon *be*. Les droites *ab*, *ae* n'ont chacune qu'un point de commun avec le plan qu'elles rencontrent ; mais la base *be* en a deux, et par conséquent tous les autres, puisqu'ils sont tous dans la même direction. Donc, 1° *une droite qui a deux points dans un plan est entièrement dans ce plan ;* 2° *une droite qui est perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites menées dans ce plan par le pied de cette perpendiculaire*. Ainsi la droite *ab* est perpendiculaire à *eb* comme elle l'est à 1*b*, 2*b*, 3*b*, etc.

Comme d'un point *a*, donné hors d'un plan, ou d'un point *b*, donné dans un plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire *ab* ou *ba* à ce plan, il en résulte que *la plus courte distance d'un point à un plan est une perpendiculaire menée de ce point sur ce plan.*

Lorsque deux plans se coupent, leur intersection ne peut être qu'en longueur, puisque ces plans n'ont point d'épaisseur. Donc *l'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Le triangle *abe*, étant perpendiculaire au plan *cd*, aura pour intersection avec ce plan la droite *eb*, et l'angle droit *abe* sera la mesure de l'angle que fait la droite *ab* avec le plan *cd*; et par la même raison l'angle *aeb* sera aussi la mesure de l'angle que forme la droite *ae* avec le même plan, ou bien sera la mesure de l'in-

clinaison de la droite *ae* sur ce plan. Si, d'un point quelconque *a*, pris sur une oblique *ae*, on abaisse sur le plan une perpendiculaire *ab*, et que, par son extrémité *b*, on mène à l'extrémité *e* de l'oblique la droite *be*, on formera toujours un triangle rectangle dont l'oblique *ae* sera l'hypoténuse, et dont l'angle *e* sera la mesure de son inclinaison sur ce plan. Donc, *l'inclinaison d'une droite sur un plan se mesure par l'angle que fait cette droite avec l'intersection d'un plan perpendiculaire au plan donné, et passant aussi par la ligne donnée.*

On conçoit facilement que par la droite *ab* (fig. 12), on pourra faire passer une infinité de plans dans toutes sortes de directions; par conséquent, une droite ou deux points ne suffisent pas pour fixer ou déterminer la direction d'un plan : mais on peut aisément voir que, par les droites *ab*, *ac*, qui se coupent, ou par les trois points *abc*, qui ne sont pas en ligne droite, on ne pourrait faire passer que le seul plan *cd*; d'où il suit, 1° que *deux droites qui se coupent, ou trois points qui ne sont pas en ligne droite, suffisent pour déterminer la direction d'un plan;* 2° que *deux droites qui se coupent, ou trois points qui ne sont pas en ligne droite, sont toujours dans un même plan, et déterminent la position d'un plan.*

Si l'on conçoit que la droite *ab* (fig. 13), perpendiculaire sur le plan *cd*, soit mue selon la direction de la droite *ae* sans cesser d'être perpendiculaire à ce plan, par ce mouvement elle aura formé le plan *af*, qui sera nécessairement perpendiculaire au plan *cd*; le point *b* aura décrit la droite *bf*, dont les points *bf* seront à égale distance du plan *cd* : par conséquent, *bf* sera parallèle à ce plan. Donc *une droite est parallèle à un plan, lorsqu'elle a deux de ses points à égale distance de ce plan.*

Voyons maintenant quelles sont les droites menées dans le plan *cd* auxquelles la droite *bf* peut être parallèle. Concevons cette droite se mouvant parallèlement à elle-même selon les

directions *bg*, *fh*, jusqu'à ce qu'elle soit dans le plan en *gh*; par ce mouvement, cette ligne aura formé le plan *bh*, qui passe par la droite *bf*, et dont l'intersection avec le plan *cd* sera la droite *gh*, dont les points *g*, *h*, seront à égale distance des points *b*, *f*. Ces deux droites seront donc parallèles entre elles. Donc *une droite parallèle à un plan, est aussi parallèle à toutes les droites formées par l'intersection d'un plan passant par cette droite et par le plan donné.*

De la Position des Plans par rapport les uns aux autres (fig. 14).

Deux plans *ab*, *ac*, qui se coupent, peuvent être considérés comme ayant d'abord été réunis, et comme ayant ensuite tourné sur leur intersection *ad*, en s'écartant l'un de l'autre. L'ouverture qu'ils laissent entre eux est désignée sous le nom d'*angle dièdre*, ou *à deux faces*; l'intersection *ad*, commune à ces deux plans, se nomme *arête*.

Si la droite *ab* (fig. 15) est perpendiculaire au plan *cd*, elle le sera aussi à toutes les droites *be*, *bf*, *bg*, *bh*, etc. Par conséquent, tous les plans qu'on pourrait faire passer par ces lignes et par la droite *ab*, seront perpendiculaires au plan *cd*, puisque *ab* sera toujours perpendiculaire aux intersections de ces plans avec le plan *cd*; donc, *si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan qui passera par cette droite sera perpendiculaire au premier plan.*

Des Plans parallèles entre eux (fig. 16).

Deux plans sont parallèles entre eux lorsqu'ils ne peuvent jamais se rencontrer, ou que tous les points de l'un sont à égale distance des points correspondans de l'autre. Si deux plans *ab*, *cd*, parallèles entre eux, sont coupés par un troisième plan *ef*, leurs

intersections *eg*, *hf*, seront deux droites contenues dans les deux premiers plans; et comme ces deux plans sont parallèles, les droites le seront aussi. Donc *les intersections de deux plans parallèles entre eux et coupés par un troisième plan, seront aussi parallèles entre elles.*

Nous avons déjà vu que trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position ou la direction d'un plan; donc si nous menons à un plan *ab* trois perpendiculaires d'égale longueur, *ik*, *gf*, *eh*, et qui ne soient pas dans un même alignement, un plan *cd*, qui passera par leurs extrémités supérieures, sera parallèle au premier plan *ab*; car si nous joignons par des droites les points *e*, *g*, *i*, *h*, *f*, *k*, nous aurons deux plans triangulaires et parallèles entre eux. Donc, *si trois droites, non situées dans un même alignement, sont égales et parallèles entre elles, les plans qui passeront par leurs extrémités, seront parallèles entre eux.*

De la Mesure des Angles formés par deux plans ou Angles dièdres (pl. 3, fig. 1).

L'angle formé par l'ouverture de deux lignes droites, est nommé *angle rectiligne* ou *angle plan :* 1° parce qu'il est formé de deux lignes droites; 2° parce que deux droites qui se coupent sont toujours dans un même plan, ou, ce qui est la même chose, parce qu'on peut toujours faire passer un plan par deux droites qui se coupent. Nous allons tâcher, avec un peu d'attention, d'établir la distinction d'un angle plan d'avec un angle dièdre.

Soit le plan *ab*, perpendiculaire sur un autre plan *cd*; si nous menons, dans ces deux plans, les droites *ac*, *ae*, perpendiculaires à l'arête *ad*, nous aurons un angle *cae*, qui sera droit, puisque *ea* est perpendiculaire à *ca*, et que ces deux droites sont aussi perpendiculaires à l'arête *ad*; l'angle *cae* sera donc la mesure de l'angle que ces deux plans perpendiculaires font entre eux. Cet angle rectiligne est un angle plan, puisque nous pouvons faire passer

par ses deux côtés un plan *cea*. Menons du point *a*, dans les deux plans, les droites *ab*, *af*, inclinées à l'arête *ad*, l'angle *baf* sera évidemment plus petit que l'angle droit *eac*. Si nous menons encore du même point *a* deux autres droites *ag*, *ah*, plus inclinées à l'arête *ad* que les précédentes, l'angle *gah* sera encore plus aigu que le précédent. Ces deux angles seront aussi des angles plans; car nous pouvons faire passer un plan par chacun de leurs côtés : tels sont les plans *baf*, *gah*. Nous voyons donc que de tous ces angles, le seul angle *cae*, dont le sommet est sur l'arête *ad*, et dont les côtés *ac*, *ae*, sont perpendiculaires à cette même arête, mesure l'angle que font entre eux les plans *ab*, *cd*. Ces différens angles formés par une même inclinaison de deux plans entre eux, sont nommés *angles dièdres* (ou à deux faces). Donc, *le seul angle qui puisse mesurer l'inclinaison de deux plans entre eux est celui dont les côtés sont menés dans ces plans perpendiculairement à l'arête de ces mêmes plans, et partant d'un point quelconque de cette même arête.*

Nous pourrons désigner l'angle dièdre par quatre lettres, dont celles des extrémités de l'arête occuperont le milieu : les deux autres le seront par les faces; ainsi, nous dirons l'angle dièdre *badf*, ou *fadb*. Comme il est essentiel de bien concevoir la mesure des angles formés par des plans, nous allons nous en occuper plus particulièrement (fig. 2).

Concevons le plan A*b*′ couché originairement sur le plan AB, puis s'élevant en tournant sur l'arête AD : par ce mouvement, les côtés AC, DB décriront, par leurs extrémités B, C, les arcs CC′, BB′, qui seront les mesures des angles CAC′, BDB′, ou de l'inclinaison du plan AB′ sur le plan AB. Observons que les côtés de ces angles sont perpendiculaires à l'arête AD, et que tout autre point que nous aurions pu prendre sur cette arête, et duquel nous aurions mené une perpendiculaire dans chacun des deux plans, nous aurait donné le même angle. Lorsque ce même plan sera élevé en *cb*, perpendiculairement sur le plan AB, l'arc ou quart de

cercle Cc, mesurera l'angle droit CAc; enfin, lorsque le plan sera arrivé en $c'b'$, ses extrémités auront décrit chacune une demi-circonférence, et auront ainsi passé par tous les degrés d'inclinaison à l'égard du plan AB, dont il sera devenu le prolongement. Donc *la somme de tous les angles que deux plans peuvent former entre eux, est toujours moindre que deux angles droits.*

Propriété des Droites coupées par des plans parallèles entre eux (fig. 3).

Si d'un point a, pris hors d'un plan bc, on mène à différens points de ce même plan, des droites aD, aE, aF, etc.; si l'on coupe ces droites par un plan gh parallèle au premier, et joignant ensuite les points D, E, F, par des droites, ainsi que ceux des intersections d, e, f, on aura les triangles aDE, aEF, aFD. Les intersections de ces triangles par le plan gh seront chacune parallèles à leur base; les triangles aDE, aEF, aFD, seront donc semblables aux triangles ade, aef, afd; leurs côtés chacun à chacun seront donc proportionnels; on aura donc aD : ad :: DE : de :: aE : ae :: EF : ef :: aF : af :: FD : fd. Or, 1° si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui partent du point a, on aura aD : ad :: aE : ae :: aF : af; donc ces droites sont coupées proportionnellement.

2°. Si, de la première suite de ces rapports égaux, on tire ceux que présentent les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura DE : de :: EF : ef :: FD : fd; donc les deux triangles DEF, def, sont semblables, puisqu'ils ont leurs côtés proportionnels. Donc, *si d'un point pris hors d'un plan, on mène à différens points de ce plan des droites, et qu'on coupe ces droites par un plan parallèle au premier, ces droites seront coupées proportionnellement.*

Il résulte de là que les figures formées par les droites qui

réunissent les points du premier plan et ceux des intersections du second, seront semblables dans les deux plans.

Des Angles polyèdres ou solides formés par l'assemblage de trois Plans entre eux.

Par un point A (fig. 4) menons à volonté trois droites Ax, Ay, Az, qui ne soient pas dans un même plan ; ces droites pourront être considérées comme étant les arêtes de trois plans indéfinis, qui se couperont deux à deux sans être parallèles entre eux, et elles formeront, par leur réunion, l'angle *solide* ou *trièdre* A, A'. Prenons ensuite sur chacune de ces lignes les points B, C, D, qui déterminent autant de triangles qui auront le point A pour sommet commun, et nous verrons facilement que l'angle solide AA' ne peut être formé à moins de trois plans, et qu'il est par conséquent le plus simple des angles solides. Les plans qui forment un angle solide, sont nommés *faces*, et les intersections de ces faces se nomment *arêtes* ou *côtés de l'angle*. Il y a donc, dans un angle solide, deux choses à considérer : 1° les *trois angles plans* ou *rectilignes* BAC, CAD, DAB; 2° les trois angles *dièdres* que ces plans font entre eux deux à deux.

Concevons (fig. 5) que le sommet A s'abaisse selon la direction A*a*, ou perpendiculairement au plan *ef*, et que les arêtes AB, AC, AD, s'écartent en raison de l'abaissement du sommet A, il sera évident que les angles du sommet augmenteront en raison de l'écartement de leurs côtés; et lorsque A sera arrivé en *a*, ou dans le plan *ef*, le sommet, ainsi que les arêtes, se trouveront dans le même plan, en *ab*, *ac*, *ad*, et l'angle solide aura disparu. Or, comme la somme de tous les angles qu'on peut faire autour d'un point, vaut toujours quatre angles droits, la somme des angles *bac*, *cad*, *dab*, vaudra donc quatre angles droits; par conséquent, lorsque ces angles étaient en A, ils valaient

moins. Donc *la somme de tous les angles plans qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits.*

Des Polyèdres, Corps ou Solides (fig. 4).

Nous avons reconnu, par l'analyse d'un corps, qu'il y avait des espaces solides terminés dans tous les sens par des surfaces planes. Nous venons de voir que trois plans qui s'entrecoupent sans être parallèles, forment bien un angle solide, mais ne circonscrivent point entièrement un espace; car les trois plans, étant illimités, laissent entre eux un espace qui, en A, est un angle solide, et qui est illimité dans la partie opposée; mais nous verrons facilement que si, par les points B, C, D, pris à volonté sur les arêtes de l'angle solide, nous faisons passer un quatrième plan, nous aurons le triangle BCD, qui coupera ces arêtes, ainsi que les trois plans des faces. La portion d'espace comprise entre ces quatre plans, sera limitée de toute part, et formera un solide ABCD, qui sera le plus simple de tous les corps : on le nomme *tétraèdre*, c'est-à-dire corps à quatre faces.

Les diverses formes des solides (qu'on nomme généralement des *polyèdres*) dépendent de la figure des faces qui les limitent et de l'inclinaison de ces mêmes faces entre elles. D'après ces différences, on leur a donné différens noms. Ainsi, le corps qui a cinq faces, se nomme *pentaèdre;* les corps qui en ont 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc., s'appellent *exaèdre, eptaèdre, octaèdre, nonécaèdre, décaèdre, endécaèdre, dodécaèdre ;* passé ce nombre, on dit corps ou figure de tant de côtés.

Le tétraèdre est nécessairement composé de quatre faces triangulaires, de quatre angles solides, et de douze angles plans ou rectilignes. On peut considérer la face opposée à un des angles solides sur laquelle la figure semble être posée, comme étant la base de cette figure; et l'angle solide opposé à cette base, comme

en étant le sommet. Ainsi, dans le tétraèdre BADC, la face BCDB sera la *base*, et l'angle solide A sera le *sommet*.

Lorsqu'un corps a pour base un polygone quelconque, et que ses faces se terminent à un angle solide, on le nomme en général *Pyramide*. On voit donc qu'une pyramide est un corps compris sous plusieurs plans triangulaires qui, partant d'un même point, se terminent à un même polygone.

Les pyramides prennent différens noms, suivant le nombre des côtés de leur base : celle qui en a trois, se nomme *pyramide triangulaire*; celle qui en a quatre, *quadrangulaire*; celle qui en offre cinq, *pentagonale*; celle où l'on en compte six, *exagonale*, etc. : mais quelle que soit cette base, ses angles solides sont nécessairement *trièdres*. On nomme *axe* de la pyramide, une droite comme *ab* (fig. 6, 7, 8, 9), menée du sommet sur le milieu de la base. On nomme aussi *hauteur* de la pyramide, une perpendiculaire *ac*, abaissée du sommet sur le plan de la base, prolongée s'il est nécessaire; car cette perpendiculaire peut, suivant la forme de la pyramide, tomber en dedans, en dehors, ou même dans une de ses faces; elle peut encore se confondre avec une de ses arêtes.

Lorsque l'axe d'une pyramide est perpendiculaire au milieu de sa base, on la nomme *pyramide droite*; et lorsqu'il est oblique à cette même base, on l'appelle *pyramide oblique*. Telles sont les pyramides représentées par les figures 6, 7, 8, 9.

Des Prismes ou Corps de cinq faces et plus (fig. 10).

Soit un polygone quelconque ABC, *abc*, par les angles duquel on mènera des droites perpendiculaires ou obliques au plan de ce polygone, et d'ailleurs toutes égales et parallèles entre elles, qu'on joindra ensuite par des droites A'B'C', *a'b'c'*; il est évident que toutes les faces AB', BC', *ab'bc'*, etc., seront des parallélogrammes qui, avec les bases, formeront un corps dont

les arêtes seront parallèles entre elles; que les deux polygones ou bases seront égaux et parallèles. Un corps qui a ces propriétés, se nomme *prisme*. Nous pouvons encore considérer le prisme comme engendré par le mouvement du polygone qui lui sert de base. Concevons ce plan ABC s'élevant parallèlement et perpendiculairement à lui-même, le résultat sera un corps nommé *prisme droit;* et si ce plan se meut parallèlement et obliquement à lui-même, comme le triangle *abc*, le corps qui en résultera sera nommé *prisme oblique*.

Les prismes sont nommés *triangulaires*, *quadrangulaires*, *pentagonaux*, etc., suivant que leurs bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc. La *hauteur* d'un prisme est la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur le plan de la base inférieure prolongée, s'il est nécessaire; telles sont *de*, *df*. L'*axe* d'un prisme est la droite *de*, menée du milieu de la base supérieure au milieu de la base inférieure, et qui est parallèle aux arêtes.

Si le polygone qui sert de base à un prisme, est un parallélogramme *ac* (fig. 11), ce prisme se nomme *parallélépipède;* et si la base est un rectangle, comme dans cet exemple, on le nomme simplement *rectangle*. On appelle *centre* d'un corps, un point, comme *e*, situé à égale distance des angles solides et des faces opposées de deux en deux.

Des Polyèdres réguliers

Les polyèdres dont toutes les parties de même espèce sont égales entre elles, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont égales et tous les angles égaux, sont nommés *polyèdres* ou *corps réguliers*. D'où il suit que si un corps a toutes ses arêtes et tous les angles de ses faces égaux, ces faces seront des polygones réguliers et égaux. Or le plus simple de tous les polygones réguliers est

le triangle équilatéral dont chacun des angles vaut les deux tiers d'un angle droit ou 60° : donc si on assemble des triangles équilatéraux pour former un angle solide, on n'en pourra mettre que trois, quatre où cinq; car six angles de leurs faces réunis autour du sommet, vaudraient quatre angles droits, et par conséquent ne pourraient former qu'un plan. Il ne peut donc y avoir que trois espèces de corps réguliers dont les faces soient des triangles équilatéraux.

Après le triangle équilatéral, vient le carré, dont chaque angle est droit; donc si l'on assemble des carrés pour former un angle solide, on n'en pourra mettre que trois; il ne peut donc y avoir qu'un seul corps régulier dont les faces soient des carrés.

Après le carré, est le pentagone régulier, dont chaque angle vaut 108°, et dont on ne pourrait prendre plus de trois pour former un angle solide; donc il ne peut y avoir qu'un solide régulier dont les faces soient pentagonales.

L'angle de l'exagone régulier vaut 120°; trois de ces angles valent quatre angles droits, et par conséquent ne peuvent former un angle solide : donc il ne peut y avoir aucun corps régulier dont les faces soient exagonales, eptagonales; etc.; donc il ne peut y avoir que cinq corps réguliers, savoir, trois à faces triangulaires, un à faces carrées, et un à faces pentagonales. Ces corps, en allant du plus petit nombre de faces au plus grand nombre, sont (fig. 12), 1° le *tétraèdre*, quatre triangles équilatéraux; 2° l'*exaèdre* ou *cube*, six carrés égaux; 3° (fig. 1re, pl. 4), l'*octaèdre*, huit triangles équilatéraux égaux; 4° le *dodécaèdre*, douze pentagones égaux; 5° enfin, l'*icosaèdre*, vingt triangles équilatéraux égaux.

Tous ces polyèdres ont aussi un centre ou point intérieur également éloigné de tous les angles solides, ainsi que de toutes les faces. Ce centre, dans chacun de ces corps, est aussi celui de deux sphères que l'on peut inscrire et circonscrire à ces corps.

Nous verrons la manière de construire ceux-ci, lorsque nous en serons à la Géométrie descriptive.

Des Corps terminés par des plans et des surfaces courbes.

Des Cylindres à bases circulaires et à bases irrégulières (Pl. 4, fig. 2.)

Les cylindres s'engendrent d'une manière absolument semblable à celle des prismes. Soient les cercles ABCD, au centre desquels sont les droites E*e*, dont l'une est perpendiculaire sur l'un des cercles, et dont l'autre est inclinée au second cercle. Concevons ces cercles s'élevant parallèlement à eux-mêmes selon les directions des droites E*e*, jusqu'en *abcd*. Par ce mouvement, ces cercles auront engendré deux corps, dont les surfaces seront droites selon les directions des droites A*a*, B*b*, etc., et courbes dans les directions circulaires ABCD, *abcd*, etc. Ces corps, nommés *cylindres*, seront terminés par deux cercles parallèles entre eux, et qu'on nomme *bases*. Lorsque la droite ou axe E*e* est perpendiculaire au cercle générateur, on le nomme *cylindre droit;* et lorsque l'axe est oblique à la base, on le nomme *cylindre oblique*.

Nous pouvons encore concevoir le cylindre comme formé par une droite A*a*, perpendiculaire ou inclinée au cercle, et se mouvant parallèlement à elle-même autour des circonférences ABCD; dans ce cas, la droite A*a* est appelée *ligne génératrice,* et l'axe E*e* est la *ligne directrice*. La *hauteur* d'un cylindre se mesure de la même manière que les prismes, par la droite E*e* dans le cylindre droit, et par *ef* dans le cylindre oblique.

D'après ce qui vient d'être dit sur la génération du cylindre, il résulte qu'un point b, pris à volonté sur la surface d'un cylindre à base circulaire, appartient également à une droite B*b* et à un cercle abcd; car nous pouvons supposer ce point placé d'abord en B, sur la circonférence de la base; puis cette base s'étant éle-

vée parallèlement à elle-même, le point b aura décrit la droite Bb, et par conséquent sera sur cette ligne. Nous pouvons encore concevoir ce point placé d'abord en a, sur la droite génératrice A*a* : lorsque cette ligne décrira le cylindre, le point a décrira l'arc ab semblable et égal à celui AB de la base, et sera constamment sur cette courbe, ainsi que sur la droite. Donc *un point quelconque de la surface d'un cylindre appartient également à une droite génératrice et à un cercle générateur égal à celui de la base de ce même cylindre*. Donc, *si par un point quelconque de la surface d'un cylindre, on fait passer un plan parallèlement à sa base, la figure qui résultera de cette coupe sera semblable et égale à cette même base*. On peut encore se représenter que le cylindre droit est formé par le mouvement d'un rectangle A*a*E*e*, tournant sur un de ses côtés E*e*.

Ce que l'on vient de dire est en général commun à tous les cylindres, car il y en a de plusieurs sortes : par exemple, si au lieu d'un cercle pour base, on avait une surface courbe irrégulière, telle que ABCD (fig. 3), il est évident, par la seule inspection de la figure, que le cylindre qui en résulterait aurait sa surface terminée par une courbe semblable à celle de sa base ou plan générateur. Cette surface serait, de même que les autres cylindres, courbe dans un sens et droite dans l'autre, c'est-à-dire que si on lui appliquait une règle dans le sens de la courbure, elle toucherait cette surface en un ou quelques points, et que si l'on appliquait cette même règle dans le sens de la droite génératrice A*a*, ou parallèlement à l'axe *e*E, elle toucherait la surface dans toute sa longueur.

Du Cône droit, et du Cône oblique ou Scalène (fig. 4 et 5).

Ce que l'on va dire s'applique également aux figures 4, 5, 6. Soient les cercles ABCD ; si, par le centre de chacun d'eux,

on élève une droite indéfinie EF perpendiculaire sur l'un et oblique sur l'autre, et que par un point *g*, pris à volonté sur ces droites, on fasse passer une autre droite aussi indéfinie, telle que A*h*, dont l'extrémité A suivra la circonférence ABCD, sans que pour cela cette droite ne quitte pas le point *g*, quand A aura terminé sa révolution, la partie A*g* de cette ligne comprise entre la circonférence et le point *g*, aura décrit une surface conique, qui aura de commun avec le cylindre, d'être droite dans un sens et courbe dans un autre. L'espace renfermé par la surface conique et par la base est appelé *cône*.

Pendant que la partie *g*A de la droite décrit la surface conique, la partie *gh* en décrira également une semblable, mais opposée à la première, et ces deux cônes auront le point *g* pour sommet commun. La droite *eg*, menée du milieu de la base au sommet, est l'*axe du cône*, et le cercle en est la base. Si l'axe est perpendiculaire au plan de la *base*, le cône est appelé *cône droit*, et si l'axe est oblique à la base, on le nomme *cône oblique* ou *scalène*. Il est évident que tous les points de la droite A*g* auront décrit autant de cercles, tels que ABCD, lorsque A*g* aura terminé sa révolution; car quand A sera en B, *a* sera aussi en *b*: le point *b* appartiendra donc également au cercle *abcd* et à la droite génératrice B*g*. Il est clair que la même propriété a lieu pour le cône à base irrégulière. Donc *un point quelconque de la surface d'un cône sera également sur une droite génératrice, et sur une courbe semblable à celle de la base de ce cône.* Les hauteurs de ces cônes seront, dans les cônes droits, l'axe *ge*, et, dans les cônes obliques, la perpendiculaire *gi* abaissée du sommet sur le plan de la base. Nous pouvons encore considérer le cône droit comme engendré par la révolution du triangle rectangle A*eg*, tournant sur son côté *ge*: les surfaces qui sont ainsi formées par la révolution d'un plan autour d'une ligne, se nomment *surfaces de révolution*. Exemple, fig. 7.

De la Sphère (Pl. 4, fig. 8).

Concevons le demi-cercle ABC tournant sur son diamètre AC; par ce mouvement il aura décrit une surface courbe régulière et renfermant un espace ou solide qu'on nomme *sphère*. Il suit de là que nous devons concevoir la surface d'une sphère comme étant composée d'un nombre indéfini de cercles égaux, tels que ABC*b*′A, A*fb*C*d*A, etc.; par conséquent, tous les points de cette surface, tels que AFB, etc., peuvent être regardés comme étant les extrémités d'autant de rayons, qui par cette raison seront tous à égale distance du point *e*, centre du cercle *générateur* et du centre de la sphère. Donc *la sphère est un corps terminé par une surface courbe, et dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur, nommé* centre de la sphère.

Lorsque le demi-cercle ABC, dans son mouvement de rotation, sera en A*b*C, le point B aura décrit l'arc B*b*; et lorsqu'il aura terminé sa révolution autour du centre *e*, ce point aura décrit le cercle entier B*bb*′*b*″B, et dans le même temps le point F aura décrit l'arc F*f*, ainsi que le cercle F*ff*′*f*″F : et comme le rayon *g*F s'est mû parallèlement au rayon *e*B, ces deux cercles seront parallèles entre eux. Mais comme le diamètre B*b*′ du cercle décrit par le point B égale le diamètre AC du cercle ABC*b*′A, ce diamètre B*b*′sera donc plus grand que le diamètre F*f*′, qui n'est que la corde de ce cercle. Il y a donc dans la sphère de grands et de petits *cercles*. Concevons un plan coupant la sphère, en passant par le diamètre B*b*′, et par conséquent par le centre *e*; la section sera le plus grand cercle de cette sphère. Concevons de même un second plan passant par un point quelconque tel que *f*, et par la corde F*f*′; la section sera aussi un cercle qui aura pour diamètre la corde F*f*′, et par conséquent sera plus petit que le premier; et comme il en serait de même de tout autre point par lequel on

ferait passer un plan. Il s'ensuit que *toute section de la sphère par un plan, est un cercle.*

Si une sphère est coupée en deux portions, ses parties se nomment *segmens sphériques;* et si ces parties sont inégales, il y a un petit et un grand segmens. Un petit segment, comme A*Fff'*A, se nomme aussi *calotte;* la partie comprise entre deux plans parallèles, comme FB*bb'f'*, est appelée *zone;* et la partie comprise entre deux demi-grands cercles qui se terminent à un diamètre commun, telle que ABC*bf*A, se nomme *fuseau.* Les extrémités AC de l'axe sur lequel la sphère est censée tourner, se nomment *pôles.* Tandis que le demi-cercle tourne sur l'axe AC, tout secteur de cercle, comme AF*ef'*A, décrit un solide ou espèce de cône nommé *secteur sphérique.*

Applications des principes ci-dessus à la Géométrie pratique.

PROBLÈME PREMIER. (Fig. 9). *Par un point a, donné sur une ligne ab, faire un angle égal à l'angle* A.

On a vu que deux angles sont égaux lorsqu'ils ont leurs sommets au centre d'un cercle (ou de deux cercles égaux) et lorsqu'ils interceptent entre leurs côtés des arcs égaux : ces arcs seront égaux s'ils ont des cordes égales.

Soit A le sommet de l'angle donné; de ce point comme centre, et d'une ouverture de compas à volonté, comme AB, on décrira l'arc BC; de la même ouverture et de *a*, comme centre, on décrira l'arc indéfini *bd*; ensuite on prendra l'ouverture de l'angle A, ou la longueur de la corde BC, qu'on portera sur l'arc *bd*, de *b* en *c*; et par les points *a*, *c*, on mènera une droite indéfinie : l'angle *cab* sera égal à l'angle CAB. On doit voir facilement qu'en opérant de la même manière, on pourrait faire un triangle égal à un autre triangle.

PROBLÈME 2. *Mener une Perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée ab* (fig. 10).

D'une ouverture de compas à volonté, mais évidemment plus grande que la moitié de *ab*, et des points *a*, *b*, comme centres, on décrira deux circonférences qui se couperont en *c*, *d*; par ces points on mènera la droite *cd*, qui sera la perpendiculaire demandée. Cette construction sert aussi à trouver le milieu d'une droite. De plus, si par les points *c*, *d*, on mène les rayons *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, on verra que *c* se trouve à l'extrémité des rayons *ca*, *cb*; ces rayons étant égaux, *c* sera à égale distance de *a* et de *b*: et comme il en serait de même à l'égard du point *d*, la droite *cd* ne penchera donc pas plus d'un côté que de l'autre sur *ab*; donc elle lui sera perpendiculaire et passera par son milieu *e*. Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de décrire les circonférences entières, il suffit de tracer seulement les arcs 1, 2, 3 et 4, 5, 6, 7, 8; et par les intersections *c*, *d*, on mènera la droite *cd*. Si l'on se proposait seulement de trouver le milieu de cette ligne, on alignerait une règle sur les points *c*, *d*, et l'on marquerait le point *e*, qui serait le milieu cherché.

PROBLÈME 3. *Par un point donné sur une droite, élever ou abaisser une Perpendiculaire à cette ligne.*

Ce problème rentre dans le précédent; car soit *e* le point donné, sur une droite *fg*, du point *e*, et d'une ouverture de compas à volonté; on marquera les points *a*, *b*; de ces points et d'une ouverture de compas plus grande, on décrira les arcs ci-dessus, qui s'entrecouperont aux points *c*, *d*; par l'un ou l'autre de ces points et par le point *e*, soit en dessus, soit en dessous de la droite *fg*, on mènera la droite *ec* ou *ed*, qui sera la perpendiculaire élevée ou abaissée de *e*.

Problème 4. *D'un point donné a, hors d'une droite bc, abaisser une Perpendiculaire sur cette ligne* (fig. 11).

De *a*, point donné, et d'une ouverture de compas assez grande pour couper la droite *bc* en deux points *d*, *e*, qui seront également distans de *a*, ensuite des points *d*, *e*, et d'une ouverture de compas à volonté, on tracera des arcs, comme dans l'exemple précédent, qui s'entrecouperont au-dessus et au-dessous de la droite *bc*; par les points d'intersection on mènera la droite *af* prolongée s'il est nécessaire. Si l'espace manquait pour tracer ces arcs au-dessous de *bc*, on les tracerait au-dessus ou au-dessous de *a*.

Problème 5. *Elever une Perpendiculaire à l'extrémité d'une droite ab* (fig. 12).

Par une de ses extrémités *b*, on prendra à volonté au-dessus de *ab* un point *c*; de ce point comme centre, et de l'intervalle *cb* comme rayon, on décrira l'arc 1, 2, à peu près au-dessus de *b*, ainsi que l'arc 3, 4, qui doit couper la droite *ab*. Par le point d'intersection et par *c*, on mènera une droite qui coupera l'arc 1, 2 en *d*; par ce point et par *b*, on mènera la droite *db*, qui sera la perpendiculaire demandée. Si avec le rayon *cb* on termine le cercle, on verra facilement que l'angle *b* est à la circonférence, et repose sur un diamètre; donc cet angle est droit, et ses côtés réciproquement perpendiculaires. *Autrement*. On prendra sur une échelle quelconque trois parties égales qu'on portera de *b* en *e*; ensuite on prendra quatre de ces mêmes parties comme rayon, et de *b* comme centre on décrira au-dessus de *b* un arc indéfini; enfin, on prendra cinq de ces mêmes parties comme rayon, et de *e* comme centre on coupera le premier arc; et par le point d'intersection *f*, et par *b*, on mènera une droite *af* qui sera perpendiculaire sur *ab*.

PROBLÈME 6. *Diviser un Angle quelconque en deux parties égales* (fig. 13).

Du sommet *a*, comme centre, et d'une ouverture de compas à volonté, on décrira un arc qui coupera les côtés de l'angle en *b*, *c*; de ces points, comme centre, et d'une ouverture quelconque de compas, on décrira les arcs 1, 2, 3, 4; par leur intersection et par *a* on mènera une droite qui partagera l'angle *dae* en deux parties égales. On peut par ce moyen diviser un angle en quatre, huit, seize, etc., parties égales.

PROBLÈME 7. *Par un point a, donné hors d'une droite bc, mener une Parallèle à cette ligne* (pl. 5, fig. 1).

Par le point *a* on mènera à la ligne *bc* une droite *ad* qui la coupera en un point quelconque *d*; de ce point comme centre et de l'intervalle *da* comme rayon, on décrira l'arc *ae*; ensuite d'un autre point quelconque *f* pris sur la droite, et avec la même ouverture de compas, on décrira l'arc indéfini *gh*; on prendra l'ouverture de l'arc *ae*, que l'on portera sur l'arc *gh* de *h* en *i*; par les points *ai* on mènera une droite qui sera parallèle à la première; car les angles *ade*, *ifh*; sont égaux, ainsi que les arcs compris entre leurs côtés; donc les points *a*, *i*, sont également éloignés de la droite *bc*.

PROBLÈME 8. *Etant donnés les trois côtés* AB, CD, EF, *d'un triangle, construire ce triangle* (pl. 6, fig. 8).

Sur une droite indéfinie on portera la longueur de l'un des côtés; par exemple, AB de *a* en *b*: on prendra ensuite la longueur de l'un des deux autres côtés, telle que CD; et de l'une des extrémités de *ab* comme centre, et de cette longueur comme rayon, on décrira l'arc indéfini 1, 2: enfin, on prendra la longueur du

troisième côté EF, et de l'autre extrémité de *ab* on décrira l'arc 3, 4; l'intersection de ces deux arcs sera le sommet du triangle. On pourra construire aussi facilement tous les polygones de cette manière, puisqu'on peut toujours les diviser en triangles.

Problème 9. *Diviser une Droite donnée en un nombre quelconque de parties égales* (pl. 5, fig. 2).

Soit la droite *ae*, qu'on se propose de diviser, par exemple, en trois parties égales. Par l'une de ses extrémités comme *e* on mènera une droite *eb* sous un angle quelconque; on prendra à volonté une ouverture de compas qu'on portera trois fois sur *eb* en partant de *e*; ensuite on joindra la dernière division *b* avec l'autre extrémité *a* de la droite donnée, et par les autres divisions *dg* on mènera des parallèles à *ab*, ou bien on se contentera de la première division *ac* qui sera le tiers de *ae*.

Problème 10. *Diviser une Droite ab donnée en parties proportionnelles à d'autres droites ck, kl, ld, etc., aussi données, en nombre quelconque.* (Même fig.)

Si ces lignes sont données séparément, on mènera une droite indéfinie *cd*, sur laquelle on portera les longueurs données de *c* en *k*, en *l*, en *d*, etc., au-dessous de *cd*, et à une distance quelconque; on mènera parallèlement à cette ligne la droite à diviser *ab*; ensuite par les extrémités de ces deux lignes on mènera des droites indéfinies qui se couperont en un point *e*; par ce point et par les divisions *k*, *l*, *d*, etc., on mènera des droites prolongées jusqu'à la droite *ab* : les parties *ah*, *hi*, *ib*, etc., seront proportionnelles aux premières données; car on aura *ea* : *ah* :: *ec* : *ck*, etc.

On doit facilement voir que si la droite à diviser eût été *cd* au lieu de *ab*, on aurait porté *cd* parallèlement au-dessus de *ab*, et

on aurait opéré de la même manière. Cette manière d'opérer est générale, c'est-à-dire que le triangle que ces lignes forment est un triangle quelconque; mais lorsqu'il est équilatéral, il réunit un avantage que les autres n'ont point; par exemple, si l'on veut diviser des droites *ef*, *cd*, etc., dans le rapport de *ab*, en parties égales ou même inégales, on formera sur cette droite un triangle équilatéral *aeb*; on portera la longueur des droites proposées *ef*, *cd*, sur les côtés du triangle, en partant du sommet, comme de *e* en *f* et de *e* en *g*, de *e* en *c* et de *e* en *d*; on mènera ensuite les droites *fg*, *cd*, etc., et par chacun des points de division de *ab* on mènera des droites au sommet *e*; les parties de *fg*, *cd*, etc., seront proportionnelles à celles de *ab*. Si la droite à diviser était *ab*, et la ligne divisée était *fg* ou *cd*, on formerait sur cette ligne un triangle équilatéral dont les côtés seraient prolongés; ensuite on porterait sur ces côtés, en partant du sommet, la longueur de *cd*, de *e* en *a*, et de *e* en *b*; on mènerait la droite *ab* par le sommet, et par chacun des points de division on mènerait des droites prolongées jusqu'à *ab*, et les parties de cette ligne seraient proportionnelles à celles de la droite *fg* ou *cd*.

Problème II. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données* ABC (fig. 2).

Il est évident que ce problème peut se résoudre par le même principe que le précédent. On tracera deux droites parallèles et indéfinies *ab*, *cd*, sur l'une de ces lignes; on portera de suite la longueur de A et celle de B; par exemple, A, de *c* en *k*, celle de B en *kl*; et sur l'autre on portera la longueur *c* en *ah*; on mènera *ace*, *hke* par le point de concours *e*, et par *l* on mènera une droite prolongée qui coupera *ab* en un point *i*, et *hi* sera la quatrième proportionnelle cherchée égale D. On aura *ck* : *kl* :: *ah* : *hi*.

Pour que *ac*, *hk*, ne se rencontrassent pas, il faudrait qu'on

eût ck égal à ah; mais alors hi serait aussi égal à kl. Si les deux moyens de la proportion étaient égaux, c'est-à-dire si l'on avait kl égal à ah, alors hi serait une troisième proportionnelle aux deux droites ah, kl.

Autre manière de résoudre le même problème (fig. 3).

On fera un angle quelconque xay, sur les côtés duquel on portera les droites proposées de cette manière : la ligne A, de a en b; la droite B, de a en c; et enfin C, de a en ad. On joindra les points b, c par une droite; par d on mènera une parallèle à bc, et ae sera la ligne cherchée égale D; car on aura $ab : ac :: ad : ae$.

Problème 12. *A deux lignes données* A, B, *trouver une troisième proportionnelle* (fig. 4).

C'est-à-dire trouver une ligne qui soit à la droite B comme B est à la ligne A. On fera, comme dans l'exemple précédent, un angle quelconque, sur les côtés duquel on portera A de a en b, B de a en c, et encore B de b en d. On joindra b et c par bc; on mènera de parallèlement à bc; et ce sera la ligne cherchée égale à C, car on aura $ab : ac :: bd : ce$; mais comme bd égale ac, on aura $ab : ac :: ac : ce$. Si A égale 4, B égale 2, C égalera 1; on aura donc, 4 : 2 :: 2 : 1.

Problème 13. *Trouver une Moyenne proportionnelle entre deux droites* A, B *données* (fig. 5).

C'est-à-dire trouver une droite x telle qu'on ait $A : x :: x : B$. On mettra de suite ces deux lignes sur une même droite, comme A de a en b, et B de b en c; du milieu de la somme ac comme diamètre, on décrira un demi-cercle, et du point b on élèvera la perpendiculaire bd, qui sera terminée à la circonférence; cette ligne

bd sera la moyenne proportionnelle demandée ou la valeur de x; on aura $ab : bd :: bd : bc$; et comme dans cet exemple A est 4, x sera 2 : on aura donc, $1 : 2 :: 2 : 4$.

Autrement (fig. 2). Sur une droite indéfinie on portera la longueur de B de *a* en *b*, puis on portera la longueur de A de *a* en *c*; sur la somme *ab* comme diamètre, on décrira un demi-cercle; de *c*, on élèvera la perpendiculaire *cd*, puis on mènera la droite *ad*, qui sera la ligne cherchée. Pour bien entendre la solution de ce problème, on doit se rappeler les propriétés du triangle rectangle. On verra que les triangles *abd*, *a′d′c′* sont semblables. On aura donc $a'c' : a'd' :: ad : ab$; ou bien le petit côté du petit triangle est à son hypoténuse, comme le petit côté du grand triangle est à son hypoténuse. On suit ordinairement la première manière.

Problème 14. *Diviser une droite donnée ab* (fig. 6), *en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire en deux parties telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la plus petite partie.*

En supposant le problème résolu, on aura $ab : ac :: ac : cb$, ou bien encore $ac : cb :: ab : ac$. On doit se rappeler que lorsqu'une tangente et une sécante se rencontrent hors d'un cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure; alors on verra qu'il faut faire de *ab* une tangente, et mener de *a* une sécante égale en longueur à *ac* plus *ab*; une partie de cette sécante égale *ac* restant au-dehors du cercle, et l'autre partie égale *ab* se trouvant au-dedans. Si l'on suppose donc que cette sécante passe par le centre, la partie intérieure égale *ab* sera le diamètre, et le rayon vaudra la moitié de *ab*; il faudra donc que *ab*, qui doit être tangente, soit perpendiculaire à l'extrémité du rayon égal à la moitié de *ab*. De tout cela résulte cette construction.

A l'une des extrémités de la ligne *ab*, on élèvera une perpendiculaire *bf* égale à la moitié de *ab*; du point *f* comme centre et prenant *fb* pour rayon on décrira un cercle, et on mènera une droite *af* qui coupera la circonférence en *e*; on fera *ac* égal à *ae*. Cette ligne *ac* sera la plus grande partie cherchée; car si l'on prolonge *af* jusqu'à la circonférence en *d*, on aura la sécante *ad* est à la tangente *ab* comme cette même tangente est à la partie extérieure *ae* de la sécante; ou bien, *ad* : *ab* : : *ab* : *ae*. Si de *a* comme centre et de *b* comme extrémité du rayon on décrit l'arc *bg*, on aura *ag* égalant *ab*, et *eg* égalant *cb*, ce qui donnera évidemment une proportion d'égalité; c'est-à-dire que *ab* : *ag* : : *ac* : *ae*, etc., et *ab* : *ac*, ou *ae* : : *ac*, ou *ae* : *cb*, ou *eg*, ou, ce qui est la même chose, et ce qui peut se réduire ainsi : *ab* : *ac* : : *ac* : *cb*; *ac* est donc moyenne proportionnelle entre les lignes *ab*, *cb*.

Problème 15 (fig. 7). *Deux droites ab, bc, inclinées l'une à l'autre, étant données ainsi qu'un point e, mener par ce point une droite qui passe par le point de concours des deux lignes données.*

Par le point donné *e* on mènera, sous un angle quelconque, une droite qui coupera les lignes données aux points *a*, *c*; par un autre point quelconque *b* ou *d*, pris à volonté sur l'une des deux droites, on mènera une parallèle à *ac*, et on aura la proportion *ac* : *bd* : : *ae* : *bx*, ou : : *ce* : *dx*. La quatrième proportionnelle donnera le point *x*, par lequel et par *e* on mènera la droite *ex*, qui, étant prolongée, passera par *f*, point de concours des deux lignes données aussi prolongées.

On verra facilement que si le point *e* eût été donné hors des droites, l'opération n'aurait pas été plus difficile; car en supposant que les droites données soient *ab*, *ex*, et que le point aussi donné soit *c*, ce sera le point *d* qu'il faudra chercher, et que l'on trouvera en cherchant une quatrième proportionnelle à ces trois

termes : $ae:ec::bx$ sera à xd. Ce problème est très utile dans la Perspective.

PROBLÈME 16 (fig. 8). *Faire passer une Circonférence par trois points a, b, c, non en ligne droite.*

Nous avons vu qu'une perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre d'un cercle; par la même raison, la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une autre corde dans le même cercle, doit y passer aussi. Ces deux cordes doivent donc se couper au centre. D'après cela, si nous joignons les points *a*, *b*, *c* par des droites (que nous pourrons considérer comme étant des cordes) sur le milieu desquelles nous élèverons des perpendiculaires *de*, *fg* qui se couperont en *h*, ce point sera le centre cherché, et de l'intervalle *ha*, *hb*, ou *hc*, comme rayon, nous décrirons la circonférence. Le même procédé sert aussi à trouver le centre d'un cercle ou même d'un arc, en prenant sur cet arc trois points à volonté. On peut encore, par le même moyen, circonscrire un cercle à un triangle donné.

PROBLÈME 17 (fig. 9). *Par un Point a, donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle.*

En supposant le problème résolu, on doit se rappeler qu'une tangente est toujours perpendiculaire au rayon, par conséquent l'angle *abc* est droit; mais cet angle droit peut appartenir à un autre cercle qui aurait *ac* pour diamètre, et dont l'angle droit serait à la circonférence; donc, si on joint le centre *c* et le point *a* donné par une droite *ac*, et que du milieu *d* de cette ligne pour centre, et de *da* ou *dc* pour rayon, on décrive une circonférence, les points *b*, *e* de ces deux circonférences seront les points de tangence par lesquels et par *a* on mènera la tangente demandée à droite ou à gauche.

PROBLÈME 18 (fig. 10). *Sur une Droite donnée ab, construire une portion de cercle capable d'un angle donné A, c'est-à-dire un segment tel que tout angle qui y sera inscrit (ou qui aura son sommet à la circonférence) soit égal à l'angle donné.*

Supposons le problème résolu, que la circonférence demandée soit *agbfa*, et qu'un angle inscrit, tel que *afb*, soit égal à l'angle A; cet angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc *agb* compris entre ses côtés; il est par conséquent égal à l'angle *cab* formé par la corde *ba* et la tangente *ac*. Maintenant le centre est facile à trouver; car si nous menons une perpendiculaire sur le milieu de *ab*, et une sur *ac* au point *a*, ces deux perpendiculaires doivent nécessairement passer par le centre, qui sera le point d'intersection *e*.

Solution. On fera à l'une des extrémités *a* de la droite *ab* l'angle *bac* égal à l'angle donné A; on élèvera sur *ac* au point *a* une perpendiculaire indéfinie, ainsi qu'une autre sur le milieu *d* de *ab*. Par le point d'intersection *e* comme centre, et avec *ea* comme rayon, on décrira une circonférence qui passera par *a* et par *b*, et qui donnera le segment demandé *afb*, dans lequel tous les angles inscrits seront égaux à l'angle donné A. L'angle *afb* a pour mesure la moitié de l'arc *agb*; et comme ces deux arcs forment la circonférence entière dont la moitié, somme des deux angles, vaut deux angles droits, ces deux angles sont supplément l'un de l'autre. On se sert avec avantage de ce problème pour décrire une portion de cercle par un mouvement continu, lorsqu'on ne peut en avoir le centre; ce que l'on va voir dans le problème suivant.

PROBLÈME 19 (fig. 11). *Décrire, par un mouvement continu, une portion de circonférence lorsqu'on ne peut en avoir le centre.*

Puisque tous les angles qui ont leur sommet à la même circonférence et qui sont appuyés sur un même arc, sont égaux, ré-

ciproquement si plusieurs angles égaux sont appuyés sur un même arc, leurs sommets seront dans une même circonférence, ou, ce qui revient au même, on peut regarder ces différens angles, tels que A*b*C, A*b'*C, etc., comme le même angle ABC, dont les côtés indéfinis BA, BC glissent entre deux points fixes A, C, et dont le sommet B décrit une circonférence. Plus cet angle sera grand, plus l'arc qu'il décrira sera petit, mais aussi plus le rayon sera grand : par exemple, l'angle *d*, plus grand que l'angle B, a décrit l'arc A*d*C plus petit que l'arc ABC; mais comme ces deux arcs appartiennent au même cercle, les rayons sont égaux. Donc le rayon *ed* du petit arc égale le rayon *e*B du grand arc; donc plus l'angle sera grand, plus l'arc sera petit, et plus le rayon sera grand. En sorte que si l'on avait à décrire un arc dont le rayon fût de 50 à 60 toises ou mètres, on ne pourrait le faire que par ce moyen, surtout si l'espace où il doit être tracé a peu d'étendue. De plus, si, après avoir tracé l'arc ABC avec l'angle ABC, on fait glisser, entre les deux mêmes points A, C, les côtés indéfinis d'un angle A*d*C, on décrira l'arc A*d*C, et par là on achèvera la circonférence entière.

On peut, d'après ce qui vient d'être dit, tracer cet arc en cherchant plusieurs points : par exemple, si l'on avait à tracer un arc de 40°, et dont le rayon serait trop grand pour la place dont on pourrait disposer, mais dont on connaîtrait la corde AB (fig. 12) et la flèche *cd*, des points A, B et par *d* on mènera des droites indéfinies A*e*, B*f*; ensuite, de A et B comme centres, et de l'intervalle AB comme rayon, on décrira les arcs indéfinis A*a*, B*b*; on divisera les arcs terminés par les droites A*e*, B*f* en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points, par exemple en trois; on portera ces divisions de *e* en *b*, et de *f* en *a*, aux points 4, 5, 6; on mènera les droites A1, B5, et l'intersection *g* sera un des points de la courbe. Il en sera de même des autres points qui seront donnés par les intersections des droites A2, B4, etc.

Il est facile de sentir la raison de ce problème : car en menant la droite A1, on diminue l'angle *d*AB de la valeur de l'arc 1*e*; mais en menant la droite B5, on augmente l'angle *d*BA de la même quantité dont on avait diminué le premier; par conséquent l'angle AgB égale l'angle A*d*B, dont le sommet *g* appartient à l'arc cherché.

PROBLÈME 20 (fig. 13, pl. 5). *Etant seulement connus la corde* AB *et le nombre de degrés que l'arc* ADB *doit contenir, décrire cet arc.*

On supposera que la corde *ab* représente celle AB, et qu'elle soutient un arc *adb* de 120°, ainsi que l'angle *acb*, dont le sommet est au centre du cercle. L'angle *aeb* ayant son sommet à la circonférence, et étant appuyé sur la même corde *ab*, aura pour mesure la moitié de l'arc *adb*, compris entre ses côtés ou 60°. Mais comme l'angle *adb* est supplément de l'angle *aeb*, il vaudra donc 120°. Connaissant cet angle, il sera facile de le construire avec deux règles, ou bien sur un carton que l'on découpera; on fera glisser les côtés de cet angle entre deux points fixes A, B, et le sommet D décrira l'arc ADB demandé. Si l'on voulait opérer par points comme dans l'exemple précédent, on n'aurait besoin que de connaître la flèche DE, ce qui est facile. L'angle *d* ou D est de 120°, par conséquent chacun des angles *dab*, *dba* sera de 30°; formant donc ces angles aux extrémités de la corde AB, puis menant les côtés, leur point d'intersection sera D, duquel on abaissera sur la corde la perpendiculaire DE, et l'on finira l'opération comme ci-devant.

PROBLÈME 21 (fig. 14). *Sur une Droite ab donnée, décrire un Carré.*

Des points *a* et *b*, comme centres, et de *ab*, comme rayon, on décrira les arcs indéfinis *acd*, *bce*; on portera l'arc *ac* de *c* en *f*; on ajoutera une règle de *f* en *b*; on coupera l'arc *ac* en

deux parties égales au point *g*; on prendra *ag*, que l'on portera de *c* en *h* et en *i*; on joindra ces points par les droites *hi*, *ib*, *ha*, et on aura le carré demandé.

PROBLÈME 22 (fig. 15). *Inscrire un Exagone régulier dans un cercle donné.*

En supposant le problème résolu, il est évident que le côté *ab* de l'exagone régulier est la corde d'un arc qui est la sixième partie de la circonférence, ou de 60°. Or la somme des trois angles d'un triangle quelconque vaut 180°. Donc les angles *cab*, *cba*, sont chacun de 60°; donc le triangle *abc* est équilatéral; donc le côté *ab* égale *ca*, rayon du cercle; d'où il suit que si l'on porte six fois le rayon sur la circonférence, et qu'on joigne les points de division par des droites, on aura tracé l'exagone régulier. Il est facile de voir que pour inscrire un polygone régulier dans un cercle donné, il suffit de diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; il s'agit seulement de savoir quelles sont les divisions de la circonférence qu'on peut faire sans tâtonnement.

PROBLÈME 23 (fig. 16). *Inscrire un Carré dans un cercle donné.*

On partagera la circonférence en quatre parties égales, ou, ce qui revient au même, on fera quatre angles droits au centre; par les points de division, on mènera les cordes *ab*, *bc*., etc. Si on partage chacun de ces arcs en deux également, et qu'on mène les cordes, on aura un nouveau polygone régulier d'un nombre de côtés double du premier; ainsi, l'on voit que le carré peut servir à inscrire successivement les polygones de 8, 16, 32, etc. côtés. De même, l'exagone servira à inscrire les polygones réguliers de 3, 12, 24, etc. côtés; les pentagones, les polygones de 10, 20, 40, etc. côtés.

Problème 24 (fig. 17). *Trouver le côté du pentagone régulier, ainsi que celui du décagone inscrit au cercle.*

On fera au centre l'angle *acb*, de 36°, qui sera le dixième de la circonférence. Par conséquent la corde *ab* sera le côté du décagone. Si l'on porte ce côté de *b* en *d*, la corde *ad* sera le côté du pentagone. *Autrement*, on élèvera le rayon *ce* perpendiculairement au diamètre *fg*, de *h*, milieu de *cg*, comme centre, et d'un rayon *he*, on décrira l'arc *ei* : la corde *ei* sera le côté du pentagone, et *ic* sera celui du décagone. Les raisons sur lesquelles est fondé ce problème, sont au-dessus des bornes de cet Ouvrage; on dira seulement que la partie *ic*, côté du décagone, est le rayon *fc*, divisé en moyenne et extrême raison.

La théorie des polygones réguliers de 7, 9, 11, 13, etc. côtés, est dans le même cas que le précédent. On peut cependant les trouver d'une manière suffisamment exacte et facile, par le moyen du compas de proportion, instrument très commode pour résoudre une très grande quantité de problèmes.

Problème 25 (pl. VI, fig. 1). *Sur une Droite donnée ab, inscrire un Pentagone régulier.*

Puisqu'un pentagone régulier est composé de cinq triangles isocèles égaux, dont les côtés sont les bases et dont les sommets sont les centres, chacun de ces sommets ayant pour mesure le cinquième de la circonférence ou 72°, les deux angles de la base vaudront chacun 54°. On fera donc ces angles à chacune de ses extrémités *a*, *b*; l'intersection *c* sera le centre du cercle dans lequel le pentagone doit être inscrit, et le côté *ca* ou *cb* en sera par conséquent le rayon. Il en sera de même pour tous les autres polygones.

Problème 26 (fig. 2). *Rectifier la circonférence d'un cercle, c'est-à-dire trouver une droite qui, à peu de chose près, soit égale à la circonférence d'un cercle donné.*

Selon Archimède, le rapport du diamètre à la circonférence est, à peu de chose près, comme 7 est à 22. Il faut donc diviser le diamètre *ab* en sept parties égales, et porter vingt-deux de ces parties sur une droite de *a* en *c*. Un autre auteur prétend que le rapport de huit à vingt-cinq est beaucoup plus approchant, et est par conséquent préférable.

Problème 27 (fig. 3). *Réduire les dimensions d'une Figure en conservant sa forme exactement; ou construire une Figure plus petite que la figure donnée.*

Lorsqu'on veut réduire une figure du grand au petit, le moyen le plus ordinaire est de réduire l'échelle de la grande figure dans le rapport demandé; mais ce moyen est insuffisant, car il est très difficile de diviser exactement les petites parties d'une échelle, surtout lorsque cette échelle est elle-même fort petite. Un moyen simple, juste et plus expéditif, serait donc préférable. Le suivant, fondé sur les proportions, réunit tous ces avantages.

Soit le polygone ABCDE, qu'on se propose de réduire en un autre semblable, mais plus petit, tel que *abcde*, dont le contour soit à celui du premier comme *ab* : AB. Pour y parvenir, on tracera une droite indéfinie *a'x*, sur laquelle on portera de *a'* en *b'* un côté quelconque de la grande figure (le plus grand est préférable), tel que AB; de *a'*, comme centre, et de *ab'*, comme rayon, on décrira l'arc indéfini *b'f*, sur lequel on portera la longueur du côté donné *ab*, de *b'* en *f*; et par les points *a'f*, on mènera la droite indéfinie *a'fg*, ce qui donnera l'angle *fa'b'*, qu'on nomme *angle de réduction*, dans lequel on voit que le rayon *a'b'* et la

corde $b'f$ sont les deux termes du rapport proposé, et que le triangle $fa'b'$ est isocèle.

Veut-on, par exemple, avoir le côté BC; on prendra la longueur de ce côté, que l'on portera de a' en c', et de a' en h, c'est-à-dire sur les côtés de l'angle de réduction; la longueur $c'h$ sera le côté cherché, qu'on portera en b, et avec lequel, pour rayon on décrira l'arc ik, sur lequel arc doit se trouver le point c; on prendra ensuite la longueur AC, qu'on portera sur l'angle de réduction de a' en l, et de a' en m; on prendra la longueur ml; on posera une des pointes du compas en a, et, avec l'autre, on coupera l'arc ik; le point d'intersection sera la position de c, par lequel on mènera le côté bc; il en sera de même de tous les autres angles de la figure. Il est facile de voir qu'on aura toujours cette série de rapports, $ab' : b'f :: a'c : c'h :: a'l : lm$, etc.

Cette manière d'opérer ne pourrait servir que jusqu'à un certain point dans les cas où l'on voudrait résoudre ce problème en sens inverse, c'est-à-dire si l'on se proposait de faire une figure ABCDE, semblable à la figure *abcde*, mais plus grande. On s'aperçoit d'abord que la longueur du côté AB ne pourrait pas couper l'arc indéfini, fig. *z*, fait avec le côté *ab* de la petite figure: dans ce cas, on ne porterait sur cet arc que la moitié, le tiers ou le quart de AB, qu'on serait obligé à chaque fois de doubler, tripler, etc., en portant deux fois la corde *bv*, si elle n'est que la moitié, comme dans cet exemple, trois fois, si etc., sur une droite indéfinie, dont on prendrait la somme.

Problème 28 (fig. 4.) *Construire une Echelle qui contienne, 1° des unités, 2° des dixièmes et 3° des centièmes d'unité.*

On entend par échelle une droite qui sert à mesurer toutes les lignes d'un plan ou d'une carte. On se sert ordinairement d'une droite divisée en parties égales, comme *xy*, qui contient des unités et des dixièmes d'unité. Si l'unité principale de cette

échelle est un mètre, les parties de xy seront des dixièmes de mètre ou des décimètres; mais si l'on avait besoin de centièmes de mètre ou de centimètres, de millièmes de mètre ou de millimètres, etc., on sent qu'il serait presque impossible de sous-diviser d'aussi petites parties. Il faudrait donc que ces dernières parties, pour être distinctes, fussent portées sur des lignes différentes : c'est à quoi l'on parviendra, en s'y prenant de la manière suivante. Soit la droite AB, égale à xy, ou à un mètre de longueur, divisée en dix parties égales ou décimètres; on a besoin d'avoir des centimètres, ou la dixième partie d'une des divisions de AB. Pour cela, on formera un triangle ABC, qui ait pour côté cette même ligne AB, et pour base une de ses divisions, ou, ce qui est la même chose, un dixième de cette ligne; ensuite, par chacun des points 1, 2, 3, 4, 5, etc., on mènera des parallèles à la base, et on aura cette suite de rapports : A1 : 1*d* :: A2 : 2*e* :: A3 : 3*f*, etc. On voit qu'il faudra dix parties comme 1*d* pour égaler la base BC; 1*d* est donc un dixième de BC; par la même raison, 2*e* vaudra deux dixièmes, 3*f* trois dixièmes, etc. Si 1*d* est un dixième de BC ou de A1, il vaudra donc un centième de AB; donc chacune des parallèles contiendra autant de dixièmes de A1, ou de centièmes de AB, que son chiffre l'indique.

Construction d'une Échelle. On divisera une droite indéfinie *ab* (fig. 4) en autant de parties égales qu'on voudra avoir d'unités principales, plus une, par exemple deux mètres; on divisera la ligne donnée en trois parties, dont la première sera *a*o, la seconde o1, et la troisième 1, 2; la première partie, *a*o, contiendra dix parties de l'unité principale, en commençant par o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9*a*. Par chacun des points *a*, o, 1, 2, etc., on abaissera des perpendiculaires; on portera sur la première et la dernière dix parties arbitraires, mais égales entre elles, et par les points de division on mènera des parallèles à *ab*; on divisera

la partie *cd* en dix parties égales à celles de *ao*; de o, à la première division d'en bas on mènera une transversale, et ainsi de suite jusqu'à la neuvième, et l'échelle sera construite. Veut-on, par exemple, avoir 75 parties, ou 7 décimètres 5 centimètres; on prendra avec le compas la longueur o7, qu'on portera sur la perpendiculaire o*d* au point 5; de ce point et sur sa parallèle, on ouvrira le compas jusqu'à la transversale 7 : la distance 5*x* sera le nombre cherché. Exemple d'une échelle de toises (fig. 5).

Problème 29 (fig. 6.) *Construire un Angle d'un nombre de degrés demandé.*

On peut résoudre ce problème de deux manières et par le moyen de deux instrumens différens. Le premier est nommé *rapporteur* : c'est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180°; l'autre est le compas de proportion, sur lequel sont gravées deux lignes appelées *lignes des cordes*.

Soit *ab* la droite sur laquelle on se propose de faire un angle de 65°. En un point *c* on placera le rapporteur de manière que son centre soit en *c*, et que l'instrument soit aligné dans la direction *ab*; on comptera le nombre de degrés demandé, et l'on marquera un point *d* à la circonférence; on ôtera l'instrument et on mènera la droite *bc* : l'angle *acd* sera l'angle demandé.

S'il s'agissait de connaître le nombre de degrés d'un angle donné, par exemple l'angle *acd*, on placerait le rapporteur comme on le voit ici, c'est-à-dire le centre au sommet de l'angle, et l'instrument aligné sur un des côtés de l'angle.

Autrement, par le compas de proportion, soit la droite *ab* (même fig.), sur laquelle on veut construire un angle de 65° au point *c* : on ouvrira le compas à volonté; de cette ouverture, comme rayon, et de *c*, comme centre, on décrira l'arc indéfini *ad*; on portera cette même ouverture sur le compas de proportion, que l'on ouvrira de manière que les deux pointes du compas ordinaire tombent sur les points 60, 60; on laissera l'instrument

dans cet état, et, avec le compas, on prendra la distance des points 65, 65, qu'on portera sur l'arc *ad*, de *a* en *d*, et on mènera la droite *cd*; l'angle *acd* sera de 65°. Si l'on voulait connaître la valeur d'un angle donné *acd*, du sommet de cet angle, avec une ouverture quelconque de compas, on décrirait un arc *ef*; on porterait cette même ouverture sur le compas de proportion, qui serait ouvert de manière que les pointes du compas tombassent sur les points 60, 60; alors on prendrait la corde *ef*, qu'on porterait sur les points qui conviendront, qui sont ici 65.

Article additionnel.

Voici une manière nouvelle et plus commode que celle que nous avons donnée ci-dessus, pour construire une figure plus grande qu'une autre figure donnée, et dans un rapport quelconque (fig. 7). Soit le polygone Y, que nous nous proposons de faire un certain nombre de fois plus grand, par exemple trois fois; tel est le polygone *y*. Prenons à volonté une ouverture de compas, toutefois un peu plus grande que le plus long côté, ou mieux encore que la plus grande diagonale de la figure originale, telle que CB (ce que nous n'avons pu faire ici faute d'espace). Nous porterons cette longueur sur une droite indéfinie, de zéro en 1, 2, 3, de zéro, comme centre, et avec les distances 01, 03, comme rayons; nous décrirons les arcs indéfinis 1*g*, 3*h*, et notre instrument sera construit. Voulons-nous avoir, par exemple, la longueur que doit donner le côté AB; portons ce côté sur l'arc 1*g*, de 1 en *i*; menons le rayon o*i* prolongé jusqu'à l'arc 3*h*, qu'il coupera en *j*, et la corde 3*j* sera le côté ab cherché, quel que soit son rapport avec l'original AB; car nous aurons toujours une proportion semblable à celle-ci : 01 : 1*i* :: 03 : 3*j*. Il en sera de même de toutes les autres lignes de la figure Y.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE.

LIVRE SECOND.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

OU THÉORIE DES PROJECTIONS.

La Géométrie descriptive a pour objet d'enseigner la manière de représenter (ou dessiner) sur une surface plane un corps ou solide quelconque, dont les dimensions peuvent être connues.

Une longue expérience a fait reconnaître que le moyen le plus simple pour parvenir à ce but, était de considérer ce corps par ses rapports avec deux plans perpendiculaires entre eux, dont l'un est horizontal, et l'autre par conséquent est vertical. Nous allons tâcher d'éclaircir ceci par des exemples (fig. 1, pl. I).

Si d'un point quelconque, A ou B, nous menons une droite à un plan *cd* ou *ef*, l'extrémité *a* ou *b*, ou bien l'intersection de cette droite avec le plan, se nomme *projection du point*. Ainsi *a* et *b* sont les projections des points A, B. Si les projections sont faites sur un plan horizontal, comme *cd*, on les nomme *projections horizontales;* et lorsqu'elles sont faites sur un plan vertical, comme *ef*, on les nomme *projections verticales*. Si la droite menée du point au plan est perpendiculaire à ce plan, comme A*a*, A*a'*, on dit que la projection est *perpendiculaire;* et lorsque cette droite est oblique au plan, comme B*b*, B*b'*, on la nomme *projection oblique*. Les plans sur lesquels on fait les projections se nomment tout simplement *plans de projections*. Nous ne nous occuperons d'abord que des projections perpendiculaires (fig. 2).

Il suit de ce qui vient d'être dit, que si de plusieurs points A, B, C, D, etc., de la surface d'un corps, nous abaissons des perpendiculaires sur les plans *ef*, *fg*, *gh*, les extrémités de ces lignes seront les projections des points originaux A, B, etc. Ainsi, les points *a*, *b*, *c*, *d*; *a'*, *b'*, *c'*, *d'*; *a''*, *b''*, *c''*, *d''*, seront les projections horizontales et verticales des points A, B, C, D; et la liaison ou réunion de ces points de projection par des droites correspondantes aux lignes ou arêtes qui lient les points A, B, C, D, formera les projections du corps donné; car il est facile de voir que les droites *ab*, *a'b'* sont les projections de l'arête AB, et ainsi des autres; que les triangles *abc*, *a'b'c'* sont les projections du triangle ou face ABC, etc. Donc les figures qui sont sur les plans *ef*, *fg*, *gh*, sont les projections horizontale et verticale du corps ou tétraèdre Y. Ces deux sortes de projections sont généralement connues dans les Arts sous les noms de *plan* et d'*élévation;* mais comme on est souvent dans le cas de faire des projections de plans ou surfaces planes, on serait obligé, pour les exprimer, de dire des plans de plans, ce qui ne serait pas très clair; on a donc préféré de les nommer *projections horizontales* et *verticales*.

D'après ce que nous venons d'exposer, nous devons facilement sentir que le premier pas à faire dans la science des projections consiste principalement à bien entendre les projections d'un point, ou, ce qui est la même chose, savoir déterminer la position d'un point dans l'espace; car lorsque nous saurons projeter un point, nous saurons nécessairement en projeter deux; or, comme deux points déterminent la direction d'une ligne droite, nous saurons par conséquent faire la projection d'une droite, et, par une semblable conséquence, nous saurons faire la projection d'une surface, ainsi que celle d'un solide, puisque cette opération n'est qu'une suite ou répétition de la première.

PROBLÈME PREMIER. *Déterminer la position d'un point donné dans l'espace* (fig. 3).

Soit A le point donné. Concevons un plan indéfini *bc* passant par ce point, il est évident que le point sera situé dans ce plan; mais comme une infinité d'autres points peuvent aussi être contenus dans ce même plan, leur position sera commune à tous, par conséquent la position de A ne pouvant pas être distinguée de celles des autres points, ne sera pas déterminée; donc un plan n'est pas suffisant pour déterminer la position d'un point dans l'espace. Si à une distance quelconque de A, telle que A*a*, nous concevons un second plan *de*, perpendiculaire au premier, ces deux plans se couperont selon la droite *b*a, le point A se trouvera donc dans le plan *bc*, et à la distance A*a* du second plan *de*; mais une infinité d'autres points, tels que *a'*, etc., peuvent aussi se trouver dans le premier plan et à la même distance du second; par conséquent la position de A n'est pas encore entièrement déterminée. Nous voyons donc que deux plans ne suffisent pas pour fixer la position de A. Concevons encore un troisième plan *ef*, qui soit perpendiculaire aux deux premiers et aussi à une distance quelconque de A, telle que *a'*, ce troisième plan coupera les deux autres selon les droites a*c*, *eg*. Nous pouvons voir actuellement que A se trouve, 1° dans le plan *bc*, 2° à la distance A*a* du second plan *de*, 3° à la distance A*a'* du troisième plan *ef*; et comme il ne peut y avoir que lui qui puisse satisfaire à ces trois conditions, sa position par rapport à ces trois plans se trouvera donc déterminée. Donc *la position d'un point donné dans l'espace est déterminée par trois plans perpendiculaires entre eux*. Il n'est pas nécessaire que l'un de ces plans passe par le point donné.

PROBLÈME 2. *Un point étant donné dans l'espace, trouver, 1° ses projections; 2° les projections d'un point étant données, trouver la position de ce point dans l'espace* (fig. 4).

Soit A le point donné; abaissons de ce point, sur chacun des deux plans de projection *de*, *ef*, une perpendiculaire A*a*, A*a'*; les points *a*, *a'* seront les projections de A, ainsi que nous l'avons déjà vu : la première partie du problème est donc résolue. Maintenant faisons abstraction du point original A, et ne considérons que ses projections *a*, *a'*. De chacun de ces points concevons une perpendiculaire indéfinie élevée sur chacun des deux plans, nous verrons que ces deux lignes s'entrecouperont nécessairement au point A, puisque, par la première opération, ces perpendiculaires sont émanées de ce point sur chacun de ces deux plans. La position de A dans l'espace se trouve donc ainsi déterminée par la considération de ses seules projections; par conséquent cette seconde partie du problème se trouve aussi résolue. Donc *les projections d'un point déterminent la position de ce point dans l'espace* Si nous concevons le point A, situé dans le plan *bc* (comme dans la fig. 3), nous verrons que les perpendiculaires A*a*, A*a'* forment, avec une portion des intersections des plans de projections avec le plan *bc*, un quadrilatère dont les angles sont droits, et dont les côtés opposés sont égaux et parallèles entre eux; par conséquent *a'*a, étant égal à A*a*, indique aussi bien que ce dernier la hauteur de A au-dessus du plan horizontal. Par la même raison a*a* indique, de même que *a'*A, la distance de A au plan vertical *ef*. La seule inspection des projections d'un point suffit donc pour nous donner une idée précise de la position d'un point dans l'espace, par rapport aux deux plans de projection.

Un point peut être donné de trois manières différentes, par

rapport aux deux plans de projections, 1° hors des deux plans, comme A; 2° dans un des deux plans, comme H et I; 3° enfin dans les deux plans, comme J. Dans ces différens cas, nous n'éprouverons aucune difficulté dans la recherche des projections de ce point. Ainsi, par exemple, nous voulons avoir les projections de H et nous savons déjà que pour avoir les projections d'un point, il ne s'agit que d'abaisser de ce point une perpendiculaire sur chacun des deux plans; or, puisque H est situé dans le plan vertical, la perpendiculaire abaissée du point sur ce plan sera zéro. Dans ce cas, la projection verticale se trouve confondue avec le point donné, ou bien, ce qui est la même chose, H sera en même temps le point donné et sa projection verticale. Il ne nous reste donc qu'à abaisser une perpendiculaire Hh sur le plan horizontal, et h sera la projection horizontale de H. Il en sera de même du point I, qui aura pour projection verticale i. A l'égard du point J, il est évident que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans sont nulles; par conséquent ce point et ses projections seront confondus.

Concevons maintenant le plan vertical *ef* tournant sur la droite *eg* comme autour d'une charnière, jusqu'à ce qu'il soit dans le prolongement du plan horizontal. Par ce mouvement, le plan vertical aura décrit l'arc *ff'*, ou un quart de cercle, par conséquent les droites a*a'*, hH auront décrit dans le même temps un semblable arc, dont les centres seront en a et h, et dont les rayons seront les mêmes qu'avant le mouvement du plan; de plus, ils seront restés perpendiculaires à *eg*; donc ces droites, dans cette nouvelle situation, indiqueront aussi bien la position des points A, H, etc., qu'elles le faisaient lorsqu'elles étaient dans une position verticale; car a*a'* horizontale égale a*a'* verticale, etc. Il est donc indifférent pour nous que le plan *ef* soit vertical ou horizontal, puisque ses propriétés sont restées les mêmes. Il nous convient seulement de toujours considérer le plan *ef*, dans cette

seconde position, comme étant constamment le plan vertical. Nous sommes obligés de faire cette supposition, afin de faciliter les opérations, qui, sans cela, ne pourraient pas se faire, opérations que jusqu'ici nous n'avons fait qu'indiquer par des figures en perspectives, moyen que nous emploierons toutes les fois que nous le croirons nécessaire. Nous allons nous occuper à résoudre le même problème par construction (fig. 5 et 1, pl. 2).

La figure 5 est la même que la figure 4, vue en face. La figure 1, pl. 2, représente les deux plans de projection dans leurs dimensions réelles, c'est-à-dire sans être en perspective; le plan vertical étant couché dans le prolongement du plan horizontal et séparé de ce dernier par la droite *eg*, sur laquelle le plan vertical est censé avoir tourné, nous nommerons dorénavant cette ligne, *commune section des deux plans*. Ainsi la partie inférieure ou au-dessous de cette ligne, sera considérée comme étant le plan horizontal, et la partie supérieure comme étant le plan vertical. Ce sont les mêmes points et les mêmes lettres que dans les figures 4 et 5. Afin qu'il soit plus facile d'en bien sentir l'analogie, nous allons tâcher de nous former une idée exacte de la position des points dont nous venons de parler. Nous voyons d'abord que le point original A des figures 4, 5, doit être situé figure 1, à trois mètres de distance de la commune section *eg*, ou du plan vertical, et de plus, qu'il doit être dans une verticale élevée de *a*, projection horizontale de A. Observons que *a'*, projection verticale de A, est élevé au-dessus de *eg* de la même quantité que A (fig. 5) est élevé au-dessus de *a* ou du plan horizontal; or nous voyons que *a'* (fig. 1) est élevé au-dessus de *eg* ou du plan horizontal, de quatre mètres; donc le point original A doit être élevé de quatre mètres perpendiculairement au-dessus de *a*, et par conséquent du plan horizontal. Concevons maintenant que le plan *eg* soit relevé sur *eg*, dans sa première position verticale, tel qu'il est figure 5, et imaginons une ho-

rizontale indéfinie menée de a'; cette ligne coupera la verticale élevée sur a, à quatre mètres au-dessus de a, ou du plan horizontal. Voulons-nous trouver la position du point H, nous voyons que h, projection horizontale de H, est sur *eg*, par conséquent à zéro de distance du plan vertical, et que sa projection verticale, qui est confondue avec son point original, est élevée au-dessus de *eg* de deux mètres; donc H est situé dans le plan vertical, à deux mètres de hauteur au-dessus du plan horizontal. Il en sera de même des points I, J, que nous trouverons avec autant de facilité. Nous nous sommes un peu étendus sur ce premier article, parce qu'il est le fondement ou la clef de tout ce qui nous reste à dire, et que nous ne devons pas le passer sans l'avoir parfaitement compris.

D'après ce que nous venons de voir, on pourrait nous demander de trouver les projections d'un point original élevé au-dessus du plan horizontal, d'une quantité donnée quelconque, et distant du plan vertical d'une quantité aussi donnée quelconque.

Solution (fig. 1). D'un point a, pris arbitrairement sur *eg*, élevons sur cette ligne une perpendiculaire indéfinie dans les deux plans, et sur laquelle nous porterons d'abord, dans le plan vertical, la hauteur demandée de a en a', et la distance demandée du point au plan vertical de a en a, dans le plan horizontal, et le problème sera résolu. Cette disposition des deux plans ne change donc nullement les indications de la position d'un point dans l'espace; donc *la position d'un point donné dans l'espace, est déterminée en menant de ce point une perpendiculaire aux deux plans de projection*, et réciproquement *l'intersection des perpendiculaires aux plans de projection, et menées par chacune des projections d'un point, détermine la position de ce point dans l'espace.*

Des Lignes droites et des Plans (fig. 4 et 5, pl. 1).

Considérons maintenant Aa, Aa', comme étant deux droites perpendiculaires à chacun des plans de projection. Puisque nous avons trouvé, par les opérations précédentes, les projections de leurs extrémités, nous avons donc aussi nécessairement les projections de ces lignes; car la perpendiculaire abaissée de A, sur le plan horizontal, passe aussi par son autre extrémité a; le point a réunira donc les projections des deux extrémités de la droite Aa; donc a sera la projection horizontale de la perpendiculaire Aa. Nous pouvons donc faire le même raisonnement à l'égard de la droite Aa', par rapport au plan vertical, d'où nous pourrons conclure que *lorsqu'une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, elle n'a sur ce plan qu'un point pour projection.*

Nous devons facilement voir que chacune de ces deux droites est parallèle à un des plans de projection; ainsi Aa est parallèle au plan vertical, par conséquent sa projection sur ce plan sera a'a : mais a'a égale Aa, de même que aa, projection de Aa', égale cette dernière; donc, *lorsqu'une droite est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan sera une droite de même longueur.*

Remarquons encore que les droites Aa, Aa' sont contenues dans le plan bc, que ce plan est perpendiculaire aux plans de projection, et que ses *traces* ba, ca sont aussi perpendiculaires à la commune section eg; de plus, les projections aa, a'a étant dans les traces ba, ca de ce plan seront donc aussi perpendiculaires à eg. Donc, 1° *lorsqu'un plan est perpendiculaire aux deux plans de projection, ses traces ou intersections sont perpendiculaires à la commune section de ces deux plans;* 2° *lorsqu'une droite est dans un plan perpendiculaire aux plans de*

projection, les projections de cette droite sont perpendiculaires à la commune section des plans de projection.

La droite AB (fig. 2 et 3, pl. 2) est parallèle aux deux plans, puisque ses extrémités sont également éloignées de chacun de ces plans; il en sera nécessairement de même des projections ab, $a'b'$ de cette ligne. Donc *lorsqu'une droite est parallèle aux deux plans de projection, les projections de cette ligne sont parallèles à la commune section des deux plans*; et réciproquement, *lorsque les projections d'une droite sont parallèles à la commune section des deux plans, la droite que ces projections représentent dans l'espace, sera aussi parallèle à ces deux plans.*

Concevons deux plans Ab; Ab', perpendiculaires à chacun des plans de projection et passant par la droite AB, ces plans auront pour projection sur chacun des plans auxquels ils sont perpendiculaires, les projections de la droite AB; ainsi ab sera la projection ou la trace horizontale du plan AB, et $a'b'$ sera la projection ou trace verticale du plan Ab'. Donc *lorsqu'un plan est perpendiculaire à un des plans de projection, sa projection ou trace sur ce plan sera une droite.* Observons que le plan Ab est parallèle au plan vertical, et par conséquent à la commune section cd; sa projection ab est aussi parallèle à cd; il en est de même du plan Ab', qui est parallèle au plan horizontal; sa projection $a'b'$ sera de même parallèle à cd; donc *lorsqu'un plan est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection ou sa trace sur l'autre plan sera parallèle à la commune section.*

Si, des quatre angles du plan AB, nous abaissons des perpendiculaires au plan vertical, nous aurons pour projection de chacun de ces angles les points ab, $a'b'$; joignons ces points par des droites, nous aurons le quadrilatère ab pour projection du plan Ab; et comme ce dernier plan est parallèle au plan vertical, ces deux figures Ab, ab' seront égales et semblables; il en sera de même à l'égard du plan Ab', qui est parallèle au plan hori-

zontal et qui aura sur ce plan, pour projection, le quadrilatère *ab*, égal et semblable au plan A*b'*. Donc *lorsqu'un plan est parallèle à l'un des plans de projection, il aura pour projection sur ce plan une figure qui lui sera égale et semblable.*

Nous voyons donc qu'un plan peut être situé de différentes manières à l'égard des deux plans de projections. Examinons maintenant sa position lorsqu'il est perpendiculaire à l'un des deux plans seulement. Soit le plan AB (fig. 4) perpendiculaire au plan vertical et incliné au plan horizontal; nous voyons que sa trace horizontale AC est perpendiculaire à la commune section, et que sa trace verticale CB est inclinée à cette même commune section. Le plan DE est au contraire perpendiculaire au plan horizontal et incliné au plan vertical. Remarquons que sa trace verticale EF est perpendiculaire à la commune section, et que sa trace horizontale DF est inclinée à cette même commune section, ce qui est le contraire du cas précédent. Donc *lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la commune section des deux plans.* La figure 5 est la projection dans les vraies dimensions de la figure 4, et est analogue aux figures 1 et 3.

Nous savons que trois points déterminent la position d'un plan, aussi voyons-nous que ces deux plans sont déterminés par trois lettres qui fixent leurs traces. Donc *un plan est donné lorsqu'on a ses traces dans chacun des deux plans.* Le plan AB (fig. 6 et 7) étant incliné aux deux plans, ses traces AC, CB ne seront pas perpendiculaires sur *de*; donc *lorsqu'un plan est incliné aux deux plans de projection, ses traces sur ces plans ne sont pas perpendiculaires sur leur commune section.* Nous avons pour le moment une connaissance suffisante des différentes positions d'une surface plane par rapport aux plans de projection, pour être en état de reprendre les opérations sur les lignes droites, que nous ne pouvions pas continuer sans la connaissance de ces notions.

Problème 3. *Étant données les projections d'une droite inclinée aux plans de projection, trouver 1° la longueur de cette ligne, 2° l'angle qu'elle fait avec chacun des deux plans.*

Soient A*b*, A*b*′ (fig. 1, pl. 3) les projections de la droite donnée; observons (fig. 2) que AB est la droite originale que nous cherchons, et qui est censée avoir produit les projections de la figure 1. Nous voyons d'abord que l'extrémité A de cette droite est commune aux deux plans, puisque ce point est sur leur commune section, *b* est la projection horizontale de B, et est par conséquent l'extrémité de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal; puisque A et *b* sont les projections des extrémités A, B de la droite AB, A*b* sera donc la projection horizontale de AB. La droite B*b* étant perpendiculaire au plan horizontal, le sera nécessairement aussi à la projection *b*A, puisque nous avons vu, en Géométrie, qu'une droite perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire à toutes les droites menées dans ce plan du pied de cette perpendiculaire; par conséquent l'angle *b* sera droit. Nous aurons donc un triangle rectangle dont la perpendiculaire B*b* et *b*A seront les côtés, et dont la droite originale AB sera l'hypoténuse. Or, nous savons que dans un triangle rectangle, lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle droit compris entre ces côtés, on connaîtra nécessairement le troisième ou l'hypoténuse. Le même raisonnement aura lieu à l'égard de la projection verticale A*b*′. Donc *lorsqu'une droite est inclinée à un des plans de projection, elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle;* et comme l'hypoténuse est toujours plus grande que chacun des deux autres côtés, il s'ensuit que *la projection d'une droite inclinée à un plan est toujours moins longue que cette même droite.*

Il suit de ce qui vient d'être dit, qu'il y a plusieurs moyens

de connaître la longueur d'une droite dont on n'a que les projections. 1°. On peut construire à part un triangle rectangle, en prenant pour côtés la projection A*b* et la perpendiculaire B*b*; l'hypoténuse sera la ligne cherchée. 2°. On portera la longueur de Ab sur la commune section de b en a, ce qui donnera le premier côté du triangle; la perpendiculaire *b*'b sera le second, et l'hypoténuse a*b*' sera la longueur cherchée. 3°. Nous savons qu'un triangle est un plan triangulaire, nous concevrons ce triangle B*b*A tournant sur sa base A*b* jusqu'à ce qu'il soit couché dans le plan horizontal en A*b*B'; par ce mouvement, ce triangle n'aura rien perdu de ses dimensions, et comme nous ne pouvons opérer en l'air, ces trois manières nous seront toujours possibles; la dernière surtout est souvent employée avec avantage. Ainsi, si nous voulons connaître la longueur de la ligne originale dont nous n'avons que les projections A*b*, A*b*' (fig. 1); de *b*, élevons sur A*b* une perpendiculaire indéfinie sur laquelle nous porterons la hauteur b*b*' de *b* en B'; nous mènerons la droite AB', qui sera l'hypoténuse du triangle A*b*B ou la longueur cherchée. Quant à l'angle que la droite originale fait avec le plan horizontal, nous devons facilement voir que c'est l'angle B'A*b*, en concevant ce triangle relevé verticalement sur sa base A*b*. A l'égard de la seconde partie du problème, c'est-à-dire l'angle que fait la droite avec le plan vertical, il n'y aura pas plus de difficultés. Du point *b*' élevons une perpendiculaire indéfinie à A*b*', sur laquelle nous porterons *b*b de *b*' en B'', et l'angle *b*'AB'' sera l'angle cherché. La raison de cette opération est que *b*b est la distance de l'extrémité B de la droite originale au plan vertical. Pour faciliter l'intelligence de ce problème, nous allons le proposer d'une manière plus générale.

Problème 4. *Les projections d'une droite étant données, ainsi qu'une portion prise sur l'une d'elles, trouver, 1° la droite que cette portion représente, 2° l'angle que cette droite fait avec chacun des plans de projection* (fig. 3).

Soient *ab*, *ab'* les projections données, ainsi que la portion *cd* prise sur cette projection horizontale. Nous voyons (fig. 4) que tous les points de la droite AB sont nécessairement correspondans à tous les points de ses projections. Donc, si des points *c*, *d* (fig. 3) nous élevons des perpendiculaires indéfinies à la commune section, ces lignes couperont la projection verticale *a'b'* aux points *c'*, *d'*, et la droite *c'd'* sera la projection verticale de la portion cherchée. Le plus difficile est trouvé; le reste de l'opération se passe comme dans le cas précédent, ainsi que nous allons le voir. Des points *c*, *d*, élevons sur *ab* des perpendiculaires indéfinies, sur lesquelles nous porterons *cc'* de *c* en C, et d*d'* de *d* en D; nous mènerons la droite CD, qui sera la longueur cherchée. Ensuite nous mènerons C*e* parallèlement à *cd*, et l'angle DC*e* sera l'inclinaison de CD sur le plan horizontal. Il en sera de même pour la projection verticale. Nous avons vu que la position d'un point dans l'espace se trouvait à l'intersection de deux perpendiculaires élevées de ses projections sur chacun des deux plans. Concevons de même un plan élevé perpendiculairement sur chacune des projections *ab*, *a'b'* (fig. 4) (telles que nous les voyons dans la figure ombrée), nous verrons que la droite originale se trouvera à l'intersection de ces deux plans. Donc *la position d'une droite dans l'espace se trouve déterminée par l'intersection de deux plans perpendiculaires aux plans de projection, et passant par les projections de cette même droite.*

Problème 5 (fig. 5). *Étant données les projections ab, a′b′ d'une droite, trouver les points où cette droite supposée prolongée doit rencontrer les plans de projection.*

Supposons le problème résolu dans la figure 6. Nous voyons d'abord que si la droite AB était prolongée vers ses deux extrémités, elle rencontrerait le plan horizontal en *c* et le plan vertical en *d′*; les projections de cette ligne se trouveront prolongées dans le même rapport : ainsi la projection sera devenue *cd*, et la projection verticale sera *cd′*. D'après cela le problème ne sera pas difficile à résoudre : nous n'avons qu'à prolonger les projections *ab*, *a′b′* (fig. 5) de part et d'autre, et, où l'une des deux rencontrera la commune section, mener à l'autre une perpendiculaire à cette même commune section, et les points d'intersections de ces perpendiculaires avec les projections seront les points cherchés. Par exemple, la projection verticale coupe *xy* en *c*, il est évident que ce point touche le plan horizontal; de ce même point abaissons sur *xy* une perpendiculaire qui coupera la projection horizontale en *c*, qui sera le point cherché; ensuite, pour la projection horizontale, il est de même évident que d, extrémité de *cd*, touche le plan vertical, puisqu'il est situé sur *xy*. Elevons donc de ce point sur *xy* une perpendiculaire qui coupera la projection verticale en *d′*, qui sera le second point cherché.

Problème 6. *Étant données les projections ab, a′b′ d'une droite et celles d'un point, mener par ce point une parallèle à la droite donnée* (fig. 7).

La droite originale AB, dont nous n'avons ici que les projections, est représentée (fig. 8) et est parallèle à une autre droite DE. Concevons un plan passant par chacune de ces droites et par leurs projections, il est clair que ces plans, ainsi que leurs traces, seront aussi parallèles entre eux, et ces traces sont les projections

sur lesquelles est situé le point donné *c*. Nous voyons donc que, pour résoudre ce problème, il faut, par les points *cc'*, mener une parallèle aux projections données, ce que nous appliquerons à la figure 7; et nous en conclurons que *deux droites parallèles entre elles dans l'espace, ont leurs projections aussi parallèles entre elles sur un même plan;* et réciproquement, que *lorsque les projections de deux droites sont parallèles entre elles, elles représentent des droites dans l'espace, aussi parallèles entre elles.*

Problème 7 (fig. 1, pl. 4). *Étant données les projections de deux droites ab, cd, ab', cd', qui se coupent dans l'espace, trouver l'angle que ces lignes font entre elles.*

Nous voyons (fig. 2) que les droites originales en question, AB, CD, se coupent en E. Concevons un plan passant par ces droites, et rencontrant le plan horizontal; la trace AC de ce plan sera la base d'un triangle ACE, dont l'angle plan AEC sera l'angle que font ces deux lignes. Si ce triangle était vertical, il n'y aurait aucune difficulté à connaître la valeur de l'angle; mais comme il est incliné aux deux plans de projection, il faut chercher un moyen de vaincre cette difficulté en couchant ce triangle dans le plan horizontal, et en le faisant tourner sur sa base AC. Pour y parvenir, du sommet E abaissons une perpendiculaire au plan horizontal, ce qui nous donnera *e* pour projection de E, et la droite *e*E pour hauteur du sommet E au-dessus du plan horizontal. Nous avons donc un triangle dont la hauteur *e*E sera un des côtés, *ef*, projection de la perpendiculaire; E*f*, abaissée du sommet sur la base, sera le second côté, et enfin *f*E sera le troisième côté ou l'hypoténuse. Couchons ce triangle dans le plan horizontal en le faisant tourner sur sa base *fe*, de *f* comme centre; et de l'hypoténuse *f*E', comme rayon, décrivons l'arc E'*g*E'', qui se terminera sur le prolongement de *ef* en E''; me-

nons les droites AE″, E″C, et l'angle AE″C sera l'angle cherché; car le triangle AEC″ est le triangle AEC ayant tourné sur sa base AC et couché dans le plan horizontal. Nous n'avons pas besoin de dire que ee', projection de eE, est égale à cette dernière ligne. Appliquons ce que nous venons de dire à la solution de notre problème (fig. 1); de e élevons sur ef une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle nous porterons ee'; menons la droite fE′; prenons cette ligne pour rayon, et de f, comme centre, décrivons l'arc E′gE″, qui coupera le prolongement de ef en E″; menons les droites aE″cE″, et nous aurons l'angle cherché aE″c. Remarquons que dans ces deux figures les projections du point d'intersection des deux droites se trouvent dans une seule et même droite perpendiculaire à hi, ce qui ne peut être autrement. Donc *les projections du point d'intersection de deux droites qui se coupent dans l'espace sont dans une seule et même droite perpendiculaire à la commune section des deux plans de projections;* et réciproquement.

Problème 8 (fig. 3). *Les projections* Ab, Ab', Cd, cd' *de deux droites étant données, déterminer si les lignes qu'elles représentent dans l'espace, se coupent ou non.*

A la première inspection de ces projections qui se coupent, nous pourrions croire que les lignes originales qu'elles représentent dans l'espace, se coupent aussi. Nous serions dans l'erreur; car, d'après le théorème de l'exemple précédent, nous voyons que les intersections de ces lignes ne sont pas dans une seule et même perpendiculaire à gh. Pour nous en assurer, examinons la figure 4, dans laquelle nous verrons que les droites originales AB, CD ne se coupent pas, et que cependant leurs projections Ab, Ab', Cd, cd' se coupent; de plus, du point d'intersection e, élevons une perpendiculaire au plan horizontal, nous verrons que

cette ligne coupera la droite CD en un point E; ce point appartient donc à cette droite : mais e appartient également à la projection Ab, donc il appartient aussi à l'original AB. En effet, nous voyons que la verticale élevée de e, passe par E sur CD, et par E′ sur AB; donc les points E, E′ ne peuvent être à l'intersection de deux droites, puisqu'ils appartiennent à deux droites qui ne se touchent pas. Il en sera de même de f'. Donc, *lorsque deux droites ne se coupent pas dans l'espace, les intersections de leurs projections ne sont pas dans une seule et même perpendiculaire à la commune section des deux plans*, et réciproquement.

PROBLÈME 9. *Etant données les traces* (*ou projections*) AB, AC *d'un plan, et les projections* d, d' *d'un point, mener par ce point un plan parallèle au premier* (fig. 5).

Supposons le problème résolu comme dans la figure 6, où le plan EF est parallèle au plan donné BC, et où par conséquent les traces de ces deux plans seront réciproquement parallèles entre elles. Prenons à volonté, sur le plan EF, un point D, par lequel nous ferons passer un plan vertical HJ, dont la trace horizontale HI sera parallèle à celle EG du plan EF, ce plan HJ coupera le plan EF selon la droite kl', ainsi que la trace verticale GF, en un point l'; la droite kl', qui a pour projection verticale $k'l'$, et pour projection horizontale HI, ou la trace horizontale du plan HJ : et comme le point D se trouve sur kl', la projection verticale de ce point se trouvera sur la projection verticale $k'l'$ de cette ligne kl' en un point d', et la projection horizontale de ce même point D sera sur GI en un point d. De ce que nous venons de dire, il suit que si par d, projection horizontale de D (fig. 5), nous menons la trace dI parallèle à BA, cette ligne sera la projection horizontale du plan vertical passant par le point origi-

nal D; et si par I nous élevons une droite indéfinie perpendiculaire à *mn*, et que du point *d'* nous menions une horizontale qui coupera la perpendiculaire élevée de I en *l'*, qui sera le point principal trouvé, par lequel nous mènerons la trace F*l'*G, et de G, la trace horizontale GE, parallèle à AB, le problème sera résolu. Donc *les traces de deux plans parallèles entre eux, sont aussi parallèles entre elles*; et réciproquement.

Problème 10 (fig. 1, pl. 5). *Deux plans qui se coupent, étant donnés par leurs traces* AB, BC, AD, DC, *trouver les projections de leur intersection.*

Nous voyons (fig. 2) que ces plans se coupent selon la droite AC, dont les extrémités A, C sont les projections horizontale et verticale, puisqu'elles touchent ces deux plans; il ne s'agit donc plus que de trouver les projections horizontale et verticale de chacun de ces points, afin d'avoir celles de l'arête AC, ce qui n'est pas difficile; car la projection horizontale de C est ç, et la projection verticale de A est a. Si nous joignons ces points par des droites, nous aurons Ac pour projection horizontale de l'arête AC, et aC pour projection verticale de la même arête.

Problème 11 (fig. 3). *Deux plans* AB, BC, AD, DC *étant donnés, trouver l'angle qu'ils font entre eux.*

Nous savons que l'angle formé par deux plans se mesure par celui de deux perpendiculaires menées d'un même point de leur intersection ou arête; dans chacune des deux faces, ces lignes déterminent un plan perpendiculaire à l'arête. Il ne s'agit donc plus que de couper ces deux plans par un troisième qui soit perpendiculaire à cette même arête. Soit un point E (fig. 4), pris à volonté sur l'arête AC; concevons un plan passant par E et coupant les deux plans perpendiculairement à l'arête, il résultera

de cette coupe un triangle DEf, incliné au plan horizontal et dont l'angle fED mesurera l'inclinaison des deux plans, ou l'angle qu'ils font entre eux. La projection horizontale de ce triangle DEf sera le triangle Def, dont la base fD est perpendiculaire à Ac et coupe cette dernière ligne en un point g; et la droite gE est la perpendiculaire abaissée du sommet E sur la base Df. Cette ligne gE est nécessairement perpendiculaire à l'arête, puisqu'elle est dans le plan coupant DEf, et sa projection horizontale sera ge. Maintenant concevons le triangle couché dans le plan horizontal; en ayant tourné sur sa base Df, le sommet E aura décrit l'arc EE″, et nous aurons le triangle DE″f, dont l'angle DE″f sera l'angle cherché. Observons que gE se trouve dans le triangle vertical AcC, formé par l'arête AC et les côtés Ac, cC, qui en sont les projections. Avant de passer à la solution du problème proposé (fig. 3), nous allons indiquer cette solution même (fig. 4). Par un point g, pris à volonté sur Ac, projection horizontale de l'arête AC, menons fD perpendiculairement à Ac; de g menons gE′ perpendiculairement à l'arête, AC; de g, comme centre, et gE, comme rayon, décrivons l'arc EE″, et le problème sera résolu. Appliquons maintenant cette solution à la figure 3. Par un point quelconque g, menons fD perpendiculaire à Ac; par c élevons une perpendiculaire indéfinie sur Ac, et sur laquelle nous porterons cC; de c en C′, menons AC′, nous aurons un triangle rectangle AcC′, dont l'hypoténuse AC′ sera l'arête des deux plans; de g menons sur AC′ la perpendiculaire gE′; de g, comme centre, et de gE′, comme rayon, décrivons l'arc E′E″; menons les droites E″f, E″D, nous aurons l'angle cherché fE″D, et le problème sera résolu.

PROBLÈME 12 (fig. 5). 1°. *Par un point donné a, a', mener une perpendiculaire à un plan* BC, CD *aussi donné; 2° trouver les projections de l'intersection de la ligne et du plan.*

Soit AE (fig. 6) la perpendiculaire menée du point A au plan BD, son intersection avec ce plan est le point E. Concevons un plan vertical *a*F passant par la perpendiculaire AE; ce plan coupera le plan donné BD selon la droite gD, et sa trace *a*h sera (ainsi que nous l'avons déjà vu) perpendiculaire à la trace BC; de même que *a'e'*, projection verticale de la perpendiculaire AE, sera aussi perpendiculaire à gD, trace verticale du plan BD. Par conséquent, si de *a* nous menons *a*h, perpendiculaire à BC, cette ligne *a*h sera la trace horizontale du plan coupant passant par la perpendiculaire AE, et hF sera la trace verticale de ce même plan. De *a'* menons sur CD une perpendiculaire indéfinie, cette ligne devra contenir la projection verticale de la perpendiculaire AE, comme *a*h doit contenir la projection horizontale de cette même ligne AE. Ainsi la première partie du problème se trouve donc résolue. Maintenant, pour trouver le point d'intersection de la droite et du plan, nous commencerons par construire la projection verticale de l'intersection des deux plans, qui sera gD, et le point d'intersection *e* de cette ligne avec la droite menée de *a'*, sera le point cherché. Si, de ce point, nous abaissons une perpendiculaire sur *a*h, nous aurons le point *e* pour projection horizontale du point d'intersection E.

L'opération que nous venons de décrire est commune aux deux figures. Pour ne laisser aucun doute sur cette opération, nous pouvons la faire encore de la manière suivante (fig. 5). Du point donné *a*, menons une perpendiculaire à BC, cette ligne *a*h sera la trace horizontale d'un plan vertical coupant le plan donné BCD; de *a* élevons sur *a*h une perpendiculaire *a*A que nous ferons

égale à aa'. De h élevons sur ha une autre perpendiculaire hD' égale hD; menons la droite gD′, cette ligne sera la coupe du plan donné, et l'angle hgDD′ sera la mesure de l'inclinaison du plan donné sur le plan horizontal. Il ne nous reste plus qu'à mener sur cette ligne, du point A, une perpendiculaire AE, qui sera la ligne demandée. Du point d'intersection E abaissons sur ah une perpendiculaire qui nous donnera e pour la projection horizontale de E, etc. Donc, *lorsqu'une droite dans l'espace est perpendiculaire à un plan, les projections de cette droite sont respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan.*

On peut aussi trouver par ce moyen l'intersection d'une droite quelconque avec un plan, c'est-à-dire que cette ligne soit ou non perpendiculaire à un plan.

Problème 13 (fig. 1, pl. 6). *Par un point a, a′ donné, mener un plan perpendiculaire à une droite bc, b′c′, aussi donnée.*

Par le problème précédent, nous savons que les traces du plan cherché doivent être perpendiculaires aux projections de la droite donnée. Le problème étant résolu (fig. 2), nous voyons que le plan DE est perpendiculaire à la droite BC, que le point A est pris à volonté dans le plan DE; si, par ce point A, nous menons une horizontale Af', cette ligne sera nécessairement parallèle à la trace DG, et coupera la trace verticale GE en f', dont la projection horizontale sera f. Celle de A sera a; par conséquent, af sera la projection horizontale de Af'; af étant parallèle à DG, sera perpendiculaire à bc. La résolution du problème consiste donc à faire passer par A un plan vertical Af, dont la trace horizontale af soit perpendiculaire à bc. Menons donc par a (fig. 1) la trace af, perpendiculaire à bc; de f, élevons sur KL une perpendiculaire indéfinie, qui sera la trace verticale indéfinie

du plan afj', perpendiculaire au plan horizontal (et passant par le point original A). Ensuite, menons par a' une horizontale qui coupera la perpendiculaire fj'' en f', ce point doit appartenir à la trace verticale du plan cherché; et comme nous savons que cette trace doit être perpendiculaire à la projection verticale de la droite donnée, menons par f' une perpendiculaire à $b'c'$, qui coupera KL en G. Ce point appartient aussi à la trace horizontale du plan cherché; et comme cette trace doit être aussi perpendiculaire à la projection horizontale de la ligne donnée, menons par G une droite GD, perpendiculaire à bc, et le problème sera résolu. Si nous voulions avoir les projections du point d'intersection de la droite avec le plan, nous opérerions exactement comme dans l'exemple précédent.

Problème 14 (fig. 3). *Étant données une droite ab, $a'b'$ et les traces* CD, DE *d'un plan, trouver l'angle que fait cette droite avec le plan.*

Avant de résoudre ce problème d'une manière générale, nous croyons qu'il convient mieux de commencer par un cas particulier très simple. Soit AB (fig. 4) la droite originale se projetant obliquement sur le plan CE, et rencontrant ce plan en un point B. Concevons un plan vertical passant par la droite AB; ce plan coupera le plan CE selon la droite fB et le plan horizontal selon la droite ab, ce qui formera un quadrilatère aB, parallèle au plan vertical de projection, et qui, par conséquent, aura pour projection sur ce plan un quadrilatère ab' qui lui sera égal et semblable; et fB, contenue dans ce rectangle, aura pour projection verticale une droite Db', qui lui sera aussi égale et semblablement inclinée. Donc les deux angles $a'b'$D, ABf, étant égaux, seront également la mesure de l'inclinaison de la droite AB sur le plan CE. Ainsi, l'angle $a'b'$D, fig. 3, est l'angle cherché. Ce cas particulier ne présente aucune difficulté; mais il n'en est pas tou-

jours de même, ainsi que nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Même problème que le précédent (fig. 5).

Cette figure est la même que la précédente; la droite *ab*, *a'*B, diffère seulement en ce qu'elle n'est pas dans un plan parallèle au plan vertical de projection, ce qui rend l'opération plus compliquée; car l'angle *a'*BD, formé par la projection verticale, et la trace du plan donné ne seraient pas la mesure de l'angle cherché, il n'en est seulement que sa projection verticale. Passons à la figure 6, où le problème est résolu. Concevons un plan vertical *a*B passant par la droite AB, ce plan passera aussi par *ab*, projection horizontale de cette droite AB, et coupera le plan CE selon la droite *h*B. Nous pourrions d'abord croire que l'angle AB*h* formé par la droite AB et par l'intersection B*h*, est la mesure cherchée de l'inclinaison de AB sur le plan CE; nous serions dans l'erreur, car le plan vertical *a*B, qui contient cet angle,e st oblique au plan CE, puisque sa trace *ab* n'est pas perpendiculaire à celle CD du plan donné. D'ailleurs, nous devons nous rappeler que l'inclinaison d'une droite sur un plan se mesure par un angle situé dans un plan qui passerait par cette droite, et serait perpendiculaire au premier plan, ce qui est toujours possible. Concevons donc un plan coupant passant par la droite AB, et qui soit perpendiculaire au plan CE, les traces de ces deux plans seront perpendiculaires entre elles; ainsi, *af* sera perpendiculaire à CD, et *a'*D le sera à DE. Ces plans se couperont selon la droite *f*B; cette ligne, ainsi que l'originale AB, seront donc dans un même plan perpendiculaire au plan CE; par conséquent, AB*f* sera l'angle cherché. Par un point A quelconque pris sur la ligne donnée, abaissons sur le plan CE une perpendiculaire A*f*, cette ligne sera aussi perpendiculaire à *f*B, et sera, de plus, le troisième côté d'un triangle A*f*B, rectangle en *f*, perpendicu-

laire au plan CE, et incliné au plan horizontal; les projections de ce triangle seront sur le plan horizontal en afb, et dans le plan vertical en aDB. A présent que nous avons les projections de ce triangle, nous le connaissons; il ne s'agit plus que de le développer en le couchant dans le plan horizontal.

Pour cela, observons que ce triangle AfB repose par son côté fB sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle fbB, lequel est vertical, ou perpendiculaire au plan horizontal. Couchons ce triangle dans le plan horizontal, en le faisant tourner sur sa base bf, il sera alors en fbB′, et son hypoténuse fB′ sera le côté ou base du triangle cherché BfA. Nous avons vu aussi que Af était perpendiculaire à fB; par conséquent, élevons de f, perpendiculairement sur fB′, ce côté Af, qui sera fA′; menons la droite A′B′, qui sera l'hypoténuse du triangle cherché, et l'angle fB′A′ mesurera l'inclinaison de la droite AB sur le plan CE. D'après ce que nous venons de dire, rien n'est si facile que de faire cette opération sur la figure 5. Nous observerons seulement que fA′ doit être égale à la droite a′D.

Projections des Solides.

Il n'y a aucune règle générale pour la projection des solides ou corps; leurs constructions peuvent être plus ou moins faciles, cela dépend de la nature de la question; mais on peut toujours en venir à bout plus ou moins directement par le moyen des principes que nous venons d'exposer. Pour résoudre les problèmes suivans, nous ferons bien d'avoir sous les yeux les corps réguliers dont nous allons nous occuper.

PROBLÈME 15 (fig. 7). *Étant donnée la projection horizontale d'un tétraèdre régulier, trouver sa projection verticale.*

Soit ABCd la projection donnée du tétraèdre posant sur le plan horizontal par une de ses faces. Il est évident que la projec-

tion verticale de cette face sera la droite AcB. Si nous connaissions la hauteur de d au-dessus du plan horizontal, nous la porterions de c en d'; nous mènerions les droites d'A, d'B, d'c, et le problème serait résolu. Il ne s'agit donc plus que de trouver cette hauteur. Remarquons que dans le tétraèdre en perspective, fig. 8, la perpendiculaire Dd, abaissée du sommet sur le plan horizontal de la base, est aussi perpendiculaire aux droites dA, dB, dC, etc., et forme par conséquent avec chacune des arêtes DA, DB, DC, dA, dB, dC, autant de triangles rectangles, dans lesquels nous connaissons deux des côtés, l'angle droit, et la direction du troisième côté, qui sera la perpendiculaire dans laquelle doit se trouver ce troisième côté. Nous pouvons donc construire un de ces triangles très aisément : par exemple, le triangle CdD, dans lequel nous connaissons le côté Cd; la direction de la droite indéfinie dD, perpendiculaire sur dC, et l'hypoténuse CD. Par conséquent, si du point d, fig. 7, nous élevons une perpendiculaire indéfinie sur dC, et que nous portions une des arêtes quelconques CA ou CB, de C en D′, nous aurons dD′ pour la hauteur cherchée, que nous porterons dans le plan vertical de c en d'; nous mènerons les droites d'A, d'B, d'C, et le problème sera résolu.

Problème 16. *Un point étant donné dans l'une des projections du tétraèdre, trouver ce point sur l'autre projection* (fig. 7 et 8).

Nous verrons dans cet exemple qu'il n'y a pas de règle générale pour les projections des corps; car ce problème peut se résoudre de plusieurs manières, mais toujours fondées sur les principes que nous connaissons. Soit e le point donné dans la projection horizontale; nous pouvons, 1° considérer ce point comme étant situé dans un plan CBd, incliné au plan horizontal, et dont la projection verticale sera le triangle cBd'. Selon la méthode géné-

*

rale, la projection verticale du point donné doit se trouver sur la perpendiculaire élevée de sa projection horizontale *e*. Si par *d* et par le point donné *e*, nous menons une droite prolongée jusqu'à la base du triangle en *f*, le point *e* sera nécessairement sur cette ligne, et sa projection verticale devra aussi se trouver sur la projection verticale de cette même ligne, qui sera $d'f$ en e', intersection de $d'f$ et de la verticale élevée de *e*. 2°. Si par *e* nous menons une droite *gh* parallèle à CB, cette ligne sera une horizontale, dont l'extrémité *h* se trouvera sur B*d*. La projection verticale de *d*B est d'B; donc, en élevant de *h* une perpendiculaire à AB, nous aurons h', qui sera l'extrémité d'une horizontale représentée par *hg*; donc, si par h' nous menons une horizontale $h'g'$, cette ligne coupera la verticale élevée de *e* en e', qui sera le point cherché. 3°. Si le point en question eût été donné en *g* sur l'arête C*d*, nous ne pourrions pas trouver sa projection verticale par la première manière, car la perpendiculaire élevée du point *g* se confondrait avec l'arête cd'; mais nous le pouvons par le second moyen, c'est-à-dire en menant par *g* une horizontale parallèle à CB, et prolonger l'horizontale menée de h' jusqu'à l'arête cd', qu'elle coupera en g', qui sera le point cherché. 4°. Nous pouvons encore coucher dans le plan horizontal le triangle rectangle C*d*D en C*d*D′, et du point *g*, élever sur CD′ la perpendiculaire *g*G′, qui coupera l'arête CD′ en G′, qui sera le point cherché; et nous porterons la hauteur *g*G′ dans le plan vertical de *c* en g'. Ainsi, nous voyons que nous pouvons employer l'un ou l'autre de ces moyens selon les circonstances. D'après ce qui vient d'être dit, il est facile de voir que si le point eût été donné dans la projection verticale, nous aurions opéré de la même manière, mais en sens inverse. 5°. Enfin, nous pourrions encore trouver ce point en cherchant une quatrième proportionnelle; car $Cd : cd' :: Gg$ ou $dg : cg'$ ou $d'g'$.

PROBLÈME 17. *Un tétraèdre étant donné, ainsi que les traces d'un plan coupant qui en retranche une partie, trouver les projections de cette coupe* (fig. 1, pl. 7).

Soient ABC*d* la projection horizontale du tétraèdre, *ef* la trace d'un plan coupant perpendiculaire au plan horizontal de projection, et retranchons du tétraèdre la partie *e*B*f*, qu'il s'agit de trouver dans la projection verticale. Nous voyons d'abord que le plan *ef* coupe la base en deux points *e*, *f*, dont les projections verticales sont ef; l'arête B*d* se trouve aussi coupée en *g*. Nous pouvons facilement trouver la projection verticale de ce point par l'un quelconque des moyens précédens, qui nous donnera g', et le triangle eg'f sera la projection cherchée. Si le plan coupant était donné dans le plan vertical comme $e'f'$ (fig. 2), ce cas ne présenterait pas plus de difficultés que le précédent; nous n'avons à chercher que les projections horizontales des trois points e', g', f', qui seront *egf*, que nous joindrons par des droites, ce qui nous donnera le triangle *efg* pour la coupe cherchée. Nous observerons seulement que le point *g*, que nous avons obtenu en menant par g' une horizontale $g'h'$, pouvait encore s'obtenir plus directement d'une autre manière. Prenons *d*B comme base du triangle formé par la perpendiculaire et par l'arête dont *d*B est la projection horizontale; portons cette base *d*B sur la commune section des deux plans; de d en B', menons l'arête B'd'; de g' menons une horizontale qui coupera d'B' en G; portons g'G (qui est la distance de la perpendiculaire à l'arête) dans le plan horizontal de *d* en *g*, qui sera le point cherché.

PROBLÈME 18 (fig. 3). *Les projections* ABC*d*, Bc*d′ d'un tétraèdre étant données, on demande de trouver les projections de ce même tétraèdre incliné au plan horizontal d'une quantité quelconque, sa base* ACB *étant supposée avoir tourné sur son côté* AB.

Cette pyramide étant posée originairement sur le plan horizontal par une de ses faces, aura pour projection verticale le triangle c*d′*B. Ne considérons d'abord sa base que comme étant un triangle ACB, dont la projection verticale est la droite cB. Si cette ligne ou base s'élevait par son extrémité c en tournant sur le point B jusqu'en *c′*, sa projection horizontale ne serait plus ABC, mais bien AB*c*, qui est la projection horizontale du triangle ABC, qui ayant tourné sur AB, se trouve incliné au plan horizontal selon l'angle cB*c′*, car la ligne C*e* est censée avoir tourné sur *e* sans quitter la direction d'un plan vertical parallèle au plan vertical de projection, et le point *c* est la projection de C élevée de la hauteur c*c′*, ou l'extrémité de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal, et dont la hauteur au-dessus de ce plan est évidemment c*c′*. Lorsque la base c′B aura décrit l'arc c′*c′*, le point d aura décrit l'arc d*d″*, et la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal nous donnera d^3, qui sera la projection horizontale de l'extrémité de l'axe d*d′* ou de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, et transportée en $d''d^4$, par le mouvement du tétraèdre. Comme le sommet d^4 s'est mu dans un même plan que C, parallèle au plan vertical, sa projection horizontale doit se trouver sur le prolongement de C*e* en d^5. Nous mènerons les droites d^5A, d^5B, d^5c, *c*A, *c*B, et nous aurons la projection horizontale cherchée du tétraèdre incliné au plan horizontal. D'après ce que nous venons de faire, nous devons voir que cette opération consiste à faire au point B l'angle demandé cB*c′*, qui est ici de 47°; mais le corps n'est pas

toujours disposé, par rapport au plan vertical, de manière à pouvoir faire usage de ce moyen, qui, dans ce cas, devient particulier. Dans l'exemple suivant, nous allons résoudre le même problème d'une manière plus générale, et que nous emploierons de préférence dans la suite.

Soit ABC*d* (fig. 4) la projection horizontale d'un tétraèdre posé par une de ses faces sur le plan horizontal, et qu'il s'agit de faire relever par son angle C, en tournant sur son arête AB, de manière que le plan de sa base fasse un angle de 47° avec le plan horizontal. Concevons la droite C*e* s'élevant par son extrémité C, en tournant sur *e*, sans cesser d'être perpendiculaire à AB, jusqu'à ce qu'elle fasse avec le plan horizontal l'angle demandé. Si nous concevons encore une perpendiculaire abaissée du point C (qui se trouvera alors dans l'espace) sur le plan horizontal, nous aurons le point *c* pour la projection horizontale de C. Maintenant, imaginons un plan vertical passant par C*e*, ce plan contiendra nécessairement l'angle demandé. Mais comme nous avons déjà reconnu que nous ne pouvions pas opérer en l'air, nous coucherons cet angle dans le plan horizontal; ou, ce qui revient au même, du point *e*, comme centre, et de *e*C, comme rayon, décrivons un arc CC′, de 50°; et de C′, abaissons une perpendiculaire sur C*e*, qui coupera cette ligne en *c*, ce point sera la projection de C′, élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur de *c*C′ : par ce mouvement, la droite C*e* se trouvera transportée en C′*e*, et le point *d* sera en *d*″; ce dernier point sera toujours l'extrémité de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base. Menons donc, de ce point et perpendiculairement à C′*e*, une droite *d*″D, égale à la hauteur du tétraèdre; menons les droites DC′, D*e*, et nous aurons le profil du tétraèdre incliné au plan horizontal sous l'angle demandé C*e*C′. De D, abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de C*e*, nous aurons d^3 pour la projection horizontale du sommet D; menons les projections

des arêtes d^3A, d^3B, d^3C; enfin, pour compléter la figure, abaissons la perpendiculaire $d''d^4$; menons les arêtes d^4, A, d^4B, CA, CB, et nous aurons pour projection horizontale une figure égale et semblable à celle du problème précédent. Cherchons maintenant les projections verticales des points A, B, c, d^3, d^4, etc., dont nous connaissons les hauteurs au-dessus du plan horizontal.

Problème 19 (fig. 5). *Construire les projections horizontales et verticales d'un Cube dont l'axe ou la diagonale soit perpendiculaire au plan horizontal.*

On nomme *axe* ou *diagonale*, dans un cube, la droite menée de l'un des angles de ce solide à l'angle opposé; telle est la droite EC. Il nous sera très facile de trouver la longueur de cette ligne, un des côtés du cube étant seul donné, si nous faisons attention qu'elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle EAC, formé par le côté AE du cube et la diagonale AC du carré de ce côté. Concevons le cube coupé par un plan vertical passant par la diagonale EG, la section sera le rectangle AG, divisé en deux parties égales (ou triangles rectangles) par la diagonale EC. Si, dans les carrés ou faces supérieures et inférieures, nous menons les diagonales FH, BD, elles se couperont avec les premières aux points f, b : il est évident que les points B, F, D, H, seront éloignés chacun des points f, b, de la moitié de la diagonale. Or, comme les droites bB, Db, Ff, Hf, sont perpendiculaires au plan rectangle AG, nous pouvons donc considérer la droite bf, comme étant la projection verticale des droites ou côtés du cube BF, DH. Il suit de ce qui vient d'être dit, que nous pouvons d'abord construire la projection horizontale du cube selon l'énoncé du problème.

Soit AE, fig. 6, le côté d'un cube quelconque (dont les lettres sont correspondances à celles du cube précédent). Par A, menons

une droite indéfinie AC, perpendiculaire à AE ; portons sur cette ligne de A en C, la diagonale du carré de AE; menons la droite EC, qui sera l'axe ou la diagonale du cube cherché. Ensuite, nous mènerons les droites EG, CG, parallèles à AC et à AE, et nous aurons le rectangle AG, qui serait résulté de la coupe du cube, selon la diagonale de l'une de ses faces ; divisons ce rectangle en deux parties égales par la droite *bf*, qui sera la projection verticale des côtés BF, DH (nous joindrons, pour cette fois seulement, ces dernières lettres à celles de leurs projections b, f), et nous aurons une figure absolument semblable à celle de la projection verticale du cube, fig. X.

Par C, extrémité de la diagonale du cube, menons une perpendiculaire *yz* à cette ligne, que nous considérerons comme étant la commune section de deux plans de projections; par conséquent, le rectangle AG sera la projection verticale d'un cube dont nous allons chercher la projection horizontale. Nous voyons déjà dans cette projection verticale, que l'axe EC est perpendiculaire à *yz*, et par conséquent au plan horizontal de projection ; nous voyons, de plus, la hauteur de chacun des points qui terminent les angles au-dessus du plan horizontal. Si nous abaissons de chacun de ces points de la projection verticale des perpendiculaires au plan horizontal, les projections de ces points doivent se trouver sur ces perpendiculaires. Cherchons, par exemple, la projection horizontale de l'axe EC. Prenons à volonté sur son prolongement un point C′ ou *e*, qui sera la projection cherchée ; puisque l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, les projections de ses deux extrémités C, E se trouvent réunies dans un seul point C′ ou *e*. Si nous concevons le rectangle AG relevé perpendiculairement sur *yz*, sa projection sur cette ligne sera ag; ce rectangle est donc dans un plan parallèle au plan vertical. Menons donc par c′, *e*, une droite parallèle à *yz*, sur laquelle doit se trouver la projection horizontale du rectangle, qui sera *a*C′*g*

égale aCg. Il nous reste encore à trouver les projections des points réunis DB, FH, qui doivent se trouver sur les perpendiculaires abaissées de ces points : les projections horizontales des points B, F, milieux du rectangle, doivent se trouver sur *ag*, aux points 1, 2. Nous voyons dans les deux figures précédentes que B est éloigné du rectangle de la moitié de la diagonale du carré ou de la face; et comme AC est égale à cette diagonale, Ab en sera la moitié, que nous porterons de 1 en *b*, et nous en ferons autant pour les points *d*, *f*, *h*. Joignons ces points par des droites, et nous aurons un exagone régulier pour la projection horizontale du cube, dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal. Il ne nous reste plus qu'à indiquer sur cette figure les arêtes supérieures et inférieures du solide. Nous voyons d'abord que AE est une arête supérieure, qui doit être par conséquent marquée en ligne pleine de *a* en *e*; ensuite GC est une arête inférieure qui doit être ponctuée comme gC′ : les arêtes EF, EH étant supérieures, seront pleines, comme *ef*, *eh*; les arêtes BC, DC étant inférieures, seront *bc*, *dc*, et la figure sera complète. Comme nous connaissons les hauteurs de chaque point de cette projection, rien ne doit nous arrêter pour construire la projection verticale, selon une droite quelconque, telle, par exemple, que ST et ST, fig. 6 bis, pl. 8. Il faudra seulement un peu d'attention pour ne pas confondre ces différens points.

PROBLÈME 20. *Construire les projections d'un Octaèdre régulier* (fig. 1).

L'octaèdre régulier est formé (ainsi que nous l'avons déjà vu) par la réunion de huit triangles équilatéraux, ou bien par la réunion de deux pyramides à bases carrées opposées bases à bases, et dont tous les angles solides toucheraient la surface intérieure d'une sphère dans laquelle il serait inscrit. Il est facile de sentir que puisque tous les angles solides de ce corps doivent toucher

l'intérieur d'une sphère, que sa hauteur doit être égale au diamètre de cette même sphère. Nous décrirons donc un cercle, que nous diviserons en quatre parties égales par les diamètres *ab*, *cd*; nous mènerons les droites *ac*, *ad*, *cb*, *db*, et nous aurons la projection horizontale cherchée. La projection verticale se construira de la même manière. Nous observerons que ces projections sont celles d'un octaèdre qui a un de ses axes perpendiculaire au plan horizontal.

Problème 21 (fig. 2). *Étant donnée une des faces de l'Octaèdre dans le plan horizontal, construire les projections de ce corps posant sur cette même face.*

Soit le triangle ABC la face donnée. Si nous considérons A comme étant le sommet de l'une des deux pyramides qui composent ce corps, BC sera un des côtés de la base : cette base fait avec le plan horizontal un angle que nous ne connaissons pas encore, mais que nous pourrons facilement connaître, puisque nous savons qu'elle repose sur le côté BC, sur lequel elle est censée tourner. Prenons donc la longueur de ce côté pour rayon, et de *d*, comme centre, décrivons un arc indéfini *ef*, ensuite abaissons une perpendiculaire de A sur BC, qui coupera ce côté en *d* : la perpendiculaire A*d* sera la hauteur de chacune des faces, et par conséquent de celle qui, en tournant sur A, doit rencontrer le côté de la base qui a déjà tourné sur *d*. Faisons tourner cette hauteur sur A, en décrivant de ce point comme centre, et de A*d* comme rayon, un arc indéfini qui coupera le premier en un point G, point de rencontre de l'une des faces avec la base carrée; menons les droites GA, G*d*; la première de ces lignes sera le profil ou l'inclinaison de l'une des faces sur la face donnée ABC, ou sur le plan horizontal, selon l'angle *d*AG; la seconde *d*G sera l'inclinaison de la base carrée qui sépare les deux pyramides selon l'angle A*d*G. La

face adjacente au côté BC se trouvera aussi facilement et de la même manière. Par G, menons une horizontale GH égale à la perpendiculaire A*d*; cette ligne sera le profil de la face supérieure. Menons la droite *d*H, qui sera le profil de la face adjacente au côté BC; de H, abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de A*d*, ce qui nous donnera le point *h* pour la projection horizontale de H, ou du sommet du triangle supérieur parallèle au premier; menons les droites *ik*, *k*C, C*h*, *h*B, *hk*, *hi*, et nous aurons la projection horizontale demandée, dont nous connaissons déjà la hauteur pour chacun de ses points : par conséquent rien ne nous empêche de chercher la projection verticale telle qu'elle est ici, ou bien sous un autre aspect.

Par le résultat de cette opération, nous voyons qu'il serait facile de l'abréger, en faisant d'abord un exagone régulier, dans lequel nous inscririons les deux triangles, et la projection horizontale serait achevée. Pour avoir les hauteurs des différens points, nous mènerons la diagonale A*h*, qui nous donnera le moyen de trouver facilement le reste, ainsi que nous venons de le faire. Pour faciliter l'intelligence de tout ce que nous venons de dire, on fera bien de consulter la perspective de cette opération (fig. 3).

Problème 22 (fig. 4). *Étant donnée dans le plan horizontal, une des faces du Dodécaèdre, construire les projections de ce corps.*

Nous avons déjà vu que le dodécaèdre est formé par l'assemblage de douze pentagones réguliers et égaux. Nous ne connaissons dans ce corps que le nombre de ses faces et leur figure. Il nous reste encore à connaître les inclinaisons de ces faces entre elles; mais à cause de sa régularité, elles ont toutes une même inclinaison l'une à l'égard de l'autre. Il nous suffira donc d'en connaître une pour connaître les autres.

Soit le pentagone ABCDE une des faces sur laquelle doit poser le corps. Concevons deux autres faces EFGHD, DIKLC, aussi couchées dans le plan horizontal, et pouvant se relever en tournant chacune sur leur base CD, DE; par leur mouvement, elles décriront dans l'espace chacune un arc de cercle, et ces arcs se termineront réciproquement par la rencontre des côtés DH, DI. Pour avoir l'inclinaison de ces deux faces, prolongeons indéfiniment les bases CD, ED, vers z, z; ensuite des points I et H abaissons sur chacune des bases prolongées les perpendiculaires Iz, Hz. Si chacun de ces pentagones était relevé perpendiculairement sur sa base, les projections horizontales de H et de I seraient également et séparément chacune en z. Mais comme ils se relèvent ensemble, les angles H, I se rencontreront dans l'espace au-dessus de h, et perpendiculairement à ce point, qui se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires Hz, Iz; h sera donc la projection horizontale du point de réunion des deux angles I et H. Nous pouvons nous en assurer en élevant de h sur zI une perpendiculaire indéfinie. De z, comme centre, et de zI, comme rayon, décrivons un arc qui coupera la perpendiculaire en I′; menons la droite zI′, nous aurons un triangle rectangle zhI′; concevons ce triangle relevé perpendiculairement sur sa base zh, I′ se trouvera alors élevé au-dessus de h de la hauteur hI′. Si nous faisons pour le point H ce que nous venons de faire pour I, nous aurons le même résultat; donc ces deux points, se réunissant dans l'espace perpendiculairement au-dessus de h, auront ce point pour projection horizontale. Pour avoir maintenant la projection horizontale de K, prolongeons indéfiniment zI, et portons xK de z en k; ces deux lignes appartenant à un même plan et étant parallèles entre elles, feront le même angle avec le plan horizontal lorsque le plan dans lequel elles sont contenues sera relevé. Ensuite, de z comme centre, et de zk comme rayon, décrivons un arc qui coupera le

prolongement de zI' en un point K', duquel nous abaisserons sur zk une perpendiculaire $K'k''$, laquelle étant prolongée jusqu'à la droite xK, nous donnera le point d'intersection k pour la projection horizontale de K. Il nous sera facile de voir que si le triangle rectangle $zk''K'$ était relevé sur sa base, nous aurions k'' pour projection de K'; transportons ce même triangle sur xK, nous aurons k, qui équivaudra à k''; ou bien encore, concevons la droite xK relevée par son extrémité K, en tournant sur x, ou mieux encore, le pentagone qui contient cette ligne, relevé en tournant sur CD jusqu'à ce qu'il fasse avec le plan horizontal un angle égal à l'angle $k''zK'$, le sommet K sera alors élevé au-dessus de k de la hauteur $k''K'$. Donc K étant relevé, aura pour projection horizontale le point k. Les autres faces nous donneraient le même résultat, par conséquent il est inutile de les chercher; nous aurons plus tôt fait de décrire du centre l, avec les rayons lh, lD, deux circonférences concentriques, dont l'une passera par h et l'autre par D. Menons les droites hD, hk; portons cette dernière sur la circonférence de k en m, n, o, etc. Par chacun de ces points et dans la direction du centre l, menons les droites mC, oB, qA, sE; ces droites seront les arêtes analogues à hD. Cela étant fait, nous aurons la projection horizontale de la moitié inférieure du dodécaèdre. A cause de la régularité de la figure, il est facile de voir que les six autres faces seront semblables à celles-ci; seulement elles seront opposées entre elles, c'est-à-dire que le pentagone supérieur aura ses angles sur la même circonférence que le premier, mais vis-à-vis le milieu de chacune de ses faces. Menons donc par les points n, p, r, g des droites dirigées vers le centre, comme nt, pu, rv, gw, etc., ainsi que les droites tu, uv, vw, etc., et nous aurons la projection supérieure, et par conséquent la projection entière. Si maintenant nous voulons avoir la longueur de l'axe ou de la diagonale du dodécaèdre, observons que le point k est élevé au-dessus du plan horizontal

de la hauteur $k''K'$; portons cette hauteur en kK'', le point q, analogue au point h, est élevé de la même hauteur que ce point, c'est-à-dire hI', que nous porterons de q en Q, et la droite QK'' sera la ligne cherchée.

Comme cet axe doit passer par le centre du corps, si nous élevons une verticale ll', cette ligne coupera la projection verticale de l'axe en l', par conséquent $1l'$ sera la moitié de la hauteur de la figure verticale. Donc en doublant cette hauteur et menant une horizontale qui sera coupée par les verticales menées des angles du pentagone supérieur, nous donnera la projection verticale de cette face supérieure. Le reste de l'opération est trop facile à faire pour en dire davantage. Nous ferons bien de nous exercer à faire la projection verticale de ce corps sous d'autres aspects.

PROBLÈME 23 (fig. 1, pl. 9). *Une des faces* ABCD *du Dodécaèdre étant donnée, construire les projections de ce corps, de manière que son axe soit perpendiculaire au plan horizontal.*

Examinons d'abord un des angles solides de ce corps; nous verrons qu'il est formé par la rencontre de trois plans ou faces pentagonales. Si nous concevons un plan passant par les extrémités des arêtes de cet angle solide, nous verrons que le résultat de cette coupe sera une pyramide triangulaire dont les côtés de la base seront égaux chacun à une des diagonales de la face, telle que BC. Formons donc un triangle équilatéral bcf représentant la base de cette pyramide renversée, ou dont le sommet A· est posé sur le plan horizontal. Il s'agit maintenant de trouver la hauteur de cette pyramide, ou, ce qui est la même chose, celle des trois points bcf de sa base; et comme ces points sont également élevés, il nous suffira de connaître la hauteur de l'un d'eux. Il y a nécessairement un rapport entre le triangle A·bc et celui ABC, puisque le premier est la projection horizontale du second.

Nous avons déjà $A \cdot g$ pour projection de AG; mais AG est une partie de AH, et nous avons besoin d'avoir la projection de cette ligne pour avoir celle de l'une des faces du dodécaèdre. Nous pourrons donc dire $AG : A \cdot g :: AH : x$, que nous trouverons, en cherchant une quatrième proportionnelle, être égale à $A \cdot h$, ou bien que nous pouvons trouver graphiquement de cette manière : de g, élevons sur $A \cdot g$ une perpendiculaire indéfinie; prenons AG, que nous porterons de $A \cdot$ en $G \cdot$, g étant un des points de la base, et élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur $gG \cdot$; ce point g sera donc aussi la hauteur des points b, c, f. Puisque AG est une portion de AH, $A \cdot G \cdot$ doit l'être aussi; par conséquent prolongeons $A \cdot G \cdot$, et portons sur cette ligne AH, de $A \cdot$ en H; de ce dernier point abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de $A \cdot g$, ce qui nous donnera le point h cherché. Prolongeons $H \cdot h$, et portons sur cette ligne de part et d'autre HD ou HE de h en d, et en e, menons les droites cd, be, et nous aurons la projection de l'une des faces pentagonales du dodécaèdre inclinée au plan horizontal selon l'angle $H \cdot A \cdot h$. Comme les deux autres faces inférieures sont semblables à celle que nous venons de trouver, ces trois faces doivent se trouver à la circonférence d'un cercle tracé de $A \cdot$, comme centre, et de $A \cdot d$ ou $A \cdot e$, comme rayon. Prolongeons de part et d'autre les perpendiculaires des deux triangles, que nous ferons égales à $A \cdot h$, et par leurs extrémités menons des perpendiculaires qui couperont la circonférence aux points i, k, l, m; par ces points menons les droites ib, kf, lf, mc, et nous aurons les projections des trois faces inférieures. La pyramide supérieure est égale et semblable à l'inférieure, elle lui est seulement opposée par les angles. Faisons passer un cercle par les trois points du premier triangle, et faisons un second triangle équilatéral nop, dont les sommets répondent au milieu de chacune des faces du premier; remarquons que chacun de ces points sera le sommet d'un pentagone, ainsi

que les points b, c, f : ces pentagones ont tous leurs côtés communs; il ne s'agit donc plus que de déterminer un de ces pentagones supérieurs pour avoir les autres, ce qui est si aisé, après ce que nous venons de faire, que nous croyons inutile de nous étendre davantage à ce sujet, l'inspection seule de la figure pouvant suffire pour cela.

Maintenant, pour avoir la projection verticale, allons par ordre; cherchons d'abord les trois faces inférieures. Le point A· étant le sommet de l'angle solide inférieur, aura sa projection verticale en a; les points b, c, f, étant élevés de la hauteur gG·, seront en b', c', f', ou seulement b', f', puisque les points b, g, c, étant dans un plan perpendiculaire au plan vertical, seront nécessairement confondus. La droite af sera la projection de l'arête A·f, et ab' sera celle des arêtes A·b, A·c, et de la droite A·g, ou bien celle du triangle A·bc, qui est un plan perpendiculaire au plan vertical; mais ce triangle n'est qu'une portion de la face pentagonale primitivement donnée, et dont AH est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le côté ED : ce côté est commun au pentagone inférieur que nous venons de construire, ainsi qu'au pentagone supérieur $edqpr$, qui est aussi perpendiculaire au plan vertical; par conséquent, sa projection verticale sera $e'p'$ égale ae'. Nous pouvons donc obtenir cette projection en élevant une verticale par le point p, sommet du pentagone supérieur de e, comme centre, et de A·H· ou AH comme rayon, nous décrirons un arc qui coupera la verticale élevée de p en un point p', qui sera le point cherché. Mais p, n, o, appartenant à la base de la pyramide supérieure, auront par conséquent une même élévation; donc, si nous portons sur la verticale élevée de n, la hauteur de p', nous aurons n' pour la projection des points n et o. Par le point n', nous mènerons une parallèle à ae', qui coupera les verticales élevées de A, et de s aux points a', s'; nous menerons les droites $a'p'$, f'a; et comme t, r, ont la même élévation que s, nous

porterons sur leur verticale la hauteur de s', et nous aurons les points t', r', et ainsi des autres points k', i', etc., qui ont même élévation que e', et nous aurons la projection verticale cherchée.

PROBLÈME 24 (fig. 2). *Étant donnée une des faces de l'Icosaèdre, construire les projections de ce corps, posant sur le plan horizontal par cette même face.*

Nous savons que ce corps est composé de vingt triangles équilatéraux. Soit donc le triangle ABC la face donnée. Remarquons que BC est un des côtés de la base d'une pyramide pentagonale; concevons cette base ayant tourné sur BC, et couchée dans le plan horizontal, nous aurons le pentagone BC*def*; menons au centre g les droites Bg, Cg, dg, eg, nous aurons la projection horizontale de la pyramide pentagonale. Concevons maintenant ce pentagone se relevant en tournant sur sa base BC, le sommet e s'arrêtera dans l'espace, à la rencontre du point h, l'un des sommets du triangle supérieur de l'icosaèdre, et sera par conséquent confondu avec ce dernier point. Donc, si de h nous élevons une verticale indéfinie, et que de l comme centre avec le comme rayon, nous décrivions un arc qui coupera la verticale en un point h', la droite hh' sera la hauteur du sommet du pentagone, base de la pyramide, et la droite lh' sera la projection verticale ou le profil de le. Pendant que le décrivait l'arc eh', lg a décrit l'arc gg'. Ce dernier point sera donc la projection verticale du centre de la base pentagonale, ou l'extrémité de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur cette base. Or, cette perpendiculaire est une portion de l'axe de l'icosaèdre; donc, si par g' nous menons une droite indéfinie perpendiculaire à lh', cette ligne sera la direction de l'axe du corps, dont nous allons tâcher de déterminer la longueur, afin d'avoir les sommets des deux pyramides opposées. Pour y parvenir, observons que la

pyramide pentagonale posant sur le plan horizontal par son sommet, la base de cette pyramide doit être élevée de la hauteur de la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base en g : telle est gG, que nous porterons sur la direction de l'axe de g' en G'.

Menons les droites $G'l$, $G'h'$: nous aurons une partie de la projection verticale de la pyramide; ensuite, de m, comme centre (des deux triangles ou faces inférieure et supérieure), et de mg, comme rayon, nous décrirons une circonférence sur laquelle doivent se trouver les projections des sommets de cinq autres pyramides pentagonales, égales et semblables à la première. Pour trouver ces pyramides, des points f, d, menons des parallèles à le, qui couperont la circonférence aux points n, o, q, r; ou bien par chacun des sommets des deux triangles, et dans la direction du centre m, menons les portions de rayon Bn, ko, Ap, iq, Cr; et, par chacun de ces points, menons des verticales qui couperont l'axe en p', et les droites Ak', lh', aux points n', o'; nous mènerons les droites indiquées par ces points, et l'opération sera terminée. La fig. 3 représente la fig. 2 dégagée de ces lignes de construction, et dont les projections sont séparées l'une de l'autre. Ainsi, connaissant la hauteur de chacun des points, nous sommes en état de construire la fig. 1, pl. 10, qui est projetée sur une ligne ab, parallèle à AB, et dans laquelle nous avons conservé les mêmes lettres. Cette opération ne présente aucune difficulté, mais elle exige beaucoup d'attention.

Problème 25 (fig. 2, pl. 10). *Étant donné un côté, ou une arête ab de l'Icosaèdre, construire les projections de ce corps de manière qu'un de ses axes soit perpendiculaire au plan horizontal.*

Ainsi que dans l'exemple précédent, nous devons considérer ce côté comme étant le côté d'une pyramide pentagonale *abcde*, posant par son sommet F sur le plan horizontal. Observons que

la partie supérieure de ce corps est aussi une pyramide *ghikl*, égale et semblable à la première, mais dont l'une a les angles de sa base vis-à-vis le milieu de chacun des côtés de l'autre. Par conséquent, nous aurons donc pour projection horizontale de ces pyramides deux pentagones dont les droites, menées du centre à chacun des angles, seront les projections des arêtes. Observons encore qu'il y a entre ces deux pyramides dix triangles qui ont une certaine inclinaison entre eux, et alternativement en sens inverse, qu'il faut absolument connaître, et dont la hauteur jointe à celles des deux pyramides, nous donnera l'axe de l'icosaèdre. Comme tous ces triangles ont leurs côtés communs, le côté *ab* peut être considéré comme étant le côté ou la base du triangle *a*H*b*, couché dans le plan horizontal. Concevons ce triangle se relevant par son sommet H, en tournant sur sa base *ab*, jusqu'à ce qu'il rencontre *h*, l'un des angles de la base de la pyramide supérieure. Pour connaître cette inclinaison, du sommet H, abaissons sur la base la perpendiculaire H*m*; élevons par *h* une perpendiculaire indéfinie à *m*H; de *m*, comme centre, et de *m*H, comme rayon, décrivons un arc qui coupera la perpendiculaire en H', la droite H'*m* sera le profil ou l'inclinaison de la face ou triangle *ab*H, selon l'angle H*m*H', puisque la projection du sommet est *h* : en menant les droites *ha*, *hb*, nous aurons la projection du triangle *a*H*b*, incliné au plan horizontal, en *ahb*; la droite *h*H' sera la longueur de la portion de l'axe comprise entre les bases des deux pyramides. Cherchons maintenant la hauteur de la pyramide inférieure au-dessus du plan horizontal. Comme tous les angles ou points de la base sont également élevés, nous prendrons indifféremment le premier qui se présentera, par exemple, le point *a*. Quelle que soit la hauteur de ce point, elle sera toujours le côté d'un triangle rectangle, dont F*a* sera l'autre côté, et l'arête dont F*a* est la projection, en sera l'hypoténuse. Par conséquent, si de *a*, nous élevons une perpendiculaire indé-

finie à Fa, et avec une arète quelconque, telle que ab, que nous porterons de F en A, la droite Aa sera la hauteur cherchée. Nous savons maintenant tout ce qu'il faut pour construire la projection verticale.

Si nous voulions inscrire ces cinq corps dans une même sphère, voici le moyen d'y parvenir, le diamètre de la sphère étant donné. Fig. 3. Soit AB le diamètre donné; divisons-le de manière que DB soit le tiers de AB; élevons la perpendiculaire DE; menons les cordes EA, EB, la première de ces lignes sera le côté du tétraèdre, et la seconde, le côté de l'hexaèdre ou cube. Du centre C, élevons perpendiculairement le rayon CF; menons la corde FB, cette ligne sera le côté de l'octaèdre. Divisons BE en moyenne et extrême raison au point G, BG sera le côté du dodécaèdre; enfin, par A, élevons la tangente AH égale AB; menons la droite CH, et la corde IA, cette dernière ligne sera le côté de l'icosaèdre. Les raisons sur lesquelles sont fondées ces propriétés sont au-dessus des limites que nous nous sommes prescrites dans cet Ouvrage.

Des trois Corps ronds. Du Cylindre, du Cône, et de la Sphère.

Du Cylindre droit à base circulaire.

Problème 26. *Étant donnée la projection horizontale d'un Cylindre dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, construire la projection verticale de ce corps* (fig. 4).

Soit le cercle ABCD, la base et la projection horizontale du cylindre donné. Par les points A, C, élevons des perpendiculaires à yz, et portons sur chacune la hauteur proposée du cylindre (qui dans cet exemple est égal à AC), et menons la droite $e'f'$, le rectangle af' sera la projection verticale cherchée.

Problème 27 (fig. 5). *Étant donnée la projection horizontale d'un Cylindre dont l'axe est parallèle au plan horizontal, construire la projection verticale de ce corps.*

Soit le rectangle *ac* la projection donnée. De chacun des points *a*, *b*, *c*, *d*, élevons des perpendiculaires à *yz*, sur lesquelles nous porterons la hauteur de ce cylindre qui, dans ce cas, est égale au diamètre *ab* ou *dc*; et, par cette hauteur, nous menerons une droite indéfinie parallèle à *yz*. Concevons que *ab* (qui est la projection de l'une des bases de ce cylindre) ait tourné sur E, et soit couché dans le plan horizontal en EAFB; alors le point original dont *a* est la projection, sera en A, qui sera élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur *a*A; il en sera de même des points *b*, B, E, F, etc. Ainsi, nous n'aurons aucune difficulté pour construire la projection verticale de ce corps. Par exemple, voulons-nous avoir la projection verticale de *a*? portons sa hauteur A*a* dans le plan vertical de a, en *a'*; il en sera de même des autres points, tels que E, *b*, etc. Voulons-nous avoir un point quelconque de cette base, par exemple, *g*, pris à volonté? de ce point, menons à *ad* une perpendiculaire qui coupera le cercle en deux points G et H; de *g*, élevons une verticale et portons la hauteur *g*G en *gg'*, et *g*H, de g en *h'*, et nous aurons les projections verticales de *g*. Il est évident que la base *cd* étant semblable et égale à la première, et, de plus, lui étant parallèle, sa projection verticale sera aussi égale et semblable à la première. Nous observerons que ces bases circulaires étant dans des plans non parallèles au plan vertical, leurs projections sur ce plan seront des ellipses, dont nous pouvons avoir très facilement les deux axes *ef'*, *a'b'*, qui sont les projections verticales des diamètres EF, A*B*, ce qui abrége beaucoup l'opération. Il ne s'agit plus que de faire passer une ellipse par les quatre points de ces axes, ce qui peut se

faire très facilement par un moyen que nous ne connaissons pas encore, mais que nous verrons bientôt. En attendant, nous allons chercher la projection verticale d'un point i, pris à volonté sur la surface du cylindre, dans la projection horizontale. Avant que de résoudre ce problème, nous devons nous rappeler qu'un point quelconque de la surface d'un cylindre appartient également à une ligne génératrice kl, et à un cercle générateur mn, égale à la base ab. Par conséquent si, par le point donné i, nous menons une droite parallèlement à l'axe Eo, cette ligne coupera le cercle de la base ab aux points I, J. Donc, le point i est élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur kI ou kJ, que nous porterons dans le plan vertical de i en i', ou en j'. Si nous voulons trouver cette projection verticale par la ligne droite seulement, sans nous servir du cercle, observons que la droite kl, menée par i, coupe le cercle de la base ab en un point k, inférieur et supérieur; donc si, de k, nous élevons une verticale, cette ligne coupera l'ellipse aux points k', p'; et si de ces points nous menons des droites horizontales ou parallèles à l'axe $e'o'$, ces lignes couperont la verticale élevée de i, aux mêmes points $i'j'$.

Problème 28 (fig. 1[re], pl. 11). *Étant donnés, dans le plan horizontal, la base circulaire d'un Cylindre, ainsi que l'angle que doit faire cette base avec le plan horizontal, construire les projections de ce corps.*

Soit le cercle AGBH, la base donnée; cette base doit s'élever par B, extrémité de son diamètre AB, en tournant sur le point A, et par conséquent former avec le plan horizontal un angle quelconque ou donné. Si cet angle est donné, par exemple, de 45°, du point A, faisons cet angle BAB', et de A, comme centre, avec AB pour rayon, décrivons un arc qui coupera l'autre côté de l'angle en B', le diamètre AB, ou la base se trouvera donc en AB', et le centre C, en C'. Comme les côtés du cylindre sont perpen-

diculaires à la base, menons par les extrémités A, B' du diamètre de cette base, deux perpendiculaires indéfinies, sur lesquelles nous porterons la hauteur donnée du cylindre, de A en D et de B' en E, nous mènerons la droite ou base supérieure DE, et nous aurons le profil du cylindre incliné au plan horizontal, selon l'angle de 45°. Maintenant, prolongeons indéfiniment le diamètre AB, cette ligne représentera la trace d'un plan vertical, dans lequel s'est mu le cylindre. Si de B', nous abaissons une perpendiculaire à AB, nous aurons b pour la projection horizontale de B'; et comme A n'a pas changé de place, nous aurons Ab pour la projection du diamètre AB'. Nous aurons de la même manière le centre c. Par ce dernier point, menons de part et d'autre une perpendiculaire à AB, sur laquelle nous porterons le rayon CG du cercle de la base de c en g, et de c en h; ce second diamètre gh n'aura pas changé de longueur, parce que GH n'a pas cessé, dans son mouvement, d'être parallèle au plan horizontal. Nous avons donc les projections de deux diamètres de la base, ce qui est suffisant pour terminer cette base, puisqu'il ne s'agit plus que de faire passer une ellipse par les quatre points A, b, g, h; mais comme nous ne connaissons pas encore ce moyen, il nous faut recourir à un autre, c'est-à-dire rapporter plusieurs autres points de la circonférence de la base à l'ellipse. Par exemple, prenons à volonté un point quelconque tel que I; menons la corde IJ, perpendiculairement à AB; comme cette ligne est dans un même plan que GH, et qu'elle lui est parallèle, elle n'éprouvera pas de changement dans sa longueur par son déplacement; par conséquent, les points I, J, K se trouveront encore sur une même ligne. Ainsi, de A, comme centre, et de AK, comme rayon, décrivons l'arc KK'. De K', abaissons sur AB une perpendiculaire indéfinie qui coupera AB en k, ce point sera la projection de K'. Prenons la longueur KI, que nous porterons de part et d'autre de k en i, et en j; ces deux points seront à la circonférence de l'ellipse : ou

bien encore, des points I, J, menons des droites parallèles à AB; ces lignes couperont la droite menée par k aux mêmes points i, j; prenons la distance il, et portons-la de l en m, et jC′ de C′, en o; ces deux derniers points m, o, appartiendront aussi à l'ellipse. Nous devons voir que, par ce moyen, un seul point I nous donne les projections de quatre. Nous ferons la même opération pour la base supérieure ED; et comme ces deux bases sont égales et parallèles, leurs projections seront semblables et égales. A présent, que nous avons la projection horizontale et les hauteurs de tous les points, nous pouvons faire la projection verticale sous tel aspect que nous voudrons.

Des différentes Sections du Cylindre par un plan (fig. 2).

Un cylindre peut être coupé de trois manières différentes par un plan, 1° lorsque le plan coupant est parallèle à l'axe; 2° lorsqu'il est parallèle à la base; 3° enfin, lorsqu'il est oblique à l'axe ou à la base. Dans le premier cas, la section sera toujours un parallélogramme plus ou moins large, en raison de la distance du plan coupant à l'axe, et dans le rapport des cordes du cercle de la base; d'où il suit que le plus large dans un même cylindre, sera celui qui résultera de la coupe faite par l'axe. Telle est la coupe faite par le plan AB, qui passe par le centre ou axe c; la coupe par le plan DE, sera plus étroite ou égale à la corde DE. Enfin si le plan coupant est tangent à la surface du cylindre comme le plan FG, qui est tangent au point H, le résultat sera une ligne hi'. Lorsque le plan est parallèle à la base, la coupe qui en résulte est un cercle égal à cette même base : telle serait la coupe faite par le plan KL. Lorsque le plan coupant est incliné à l'axe, comme xy, figure 3, la section sera une surface nommée ellipse, laquelle est terminée par une courbe nommée circonférence de l'ellipse. Comme cette courbe a beau-

coup de propriétés, nous serons obligés de nous étendre un peu, afin de connaître celles qui ont rapport à l'objet qui nous occupe, et dont nous aurons fréquemment besoin. Il est évident que si, de plusieurs points pris sur la circonférence d'un cercle, base d'un cylindre, tels que *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc., nous menons des droites génératrices parallèles à l'axe *gg'*, ces lignes rencontreront la circonférence de l'ellipse en des points analogues et correspondans à chacun des points de la base. Le cercle de cette base, qui est générateur du cylindre, peut donc aussi être considéré comme générateur de l'ellipse. Nous voyons en effet que les diamètres de l'ellipse répondent aux diamètres du cercle; que les droites *b'f'*, *c'e'*, sont coupées en deux parties égales par le diamètre *a'd'*, comme les cordes *bf*, *ce*, qui leur correspondent, le sont dans le cercle par le diamètre *ad*. Ainsi une droite quelconque qui passe par le centre de l'ellipse et qui se termine à la circonférence, est en général un diamètre de même que dans le cercle; mais comme dans l'ellipse, ces diamètres ne sont pas égaux entre eux, et qu'ils ont des propriétés différentes, il nous convient de les distinguer. Ainsi, lorsque deux diamètres dans l'ellipse répondent à deux diamètres qui dans le cercle sont perpendiculaires entre eux, on les nomme diamètres conjugués. Par exemple *i'j'*, *k'l'*, *b'e'*, *c'f'*, sont des diamètres conjugués. On les reconnaît dans l'ellipse par d'autres propriétés dont nous parlerons bientôt. Remarquons que dans tous ces diamètres conjugués, il n'y en a que deux *i'j'*, *k'l'*, qui soient perpendiculaires entre eux : on les nomme *axe* de l'ellipse; et comme ils diffèrent en longueur, on les distingue en *grand* et *petit axe*. Le grand axe divise l'ellipse dans sa plus grande longueur en deux parties égales, de même que le petit la divise dans sa plus grande largeur, aussi en deux parties égales figure 4.

Nous voyons dans cette figure 4 la projection horizontale d'un cylindre droit *ab*, ainsi que sa projection verticale *a'b'*. Ce

cylindre est coupé par un plan *cd*, parallèle au plan vertical de projection, la section *eb* de ce cylindre aura pour projection verticale une ellipse dont les deux axes seront $e'b'$, fg'. La partie *ebh*, qui est retranchée par le plan *cd*, se trouve ponctuée dans la projection verticale, afin d'aider à l'intelligence de cette figure. L'ellipse $e'fb'g'$ appartiendra donc à un cylindre droit, et aura pour cercle générateur, la base circulaire de ce cylindre.

Dans la figure 1, pl. 12, nous voyons la projection horizontale du cylindre oblique à base circulaire, et dont l'axe fait un angle *ahi* avec le plan horizontal. Ce cylindre est coupé de même que le précédent, par un plan *cd*, parallèle au plan vertical. La section *eb* de ce cylindre aura pour projection verticale une ellipse $e'fb'g'$, qui appartiendra à ce cylindre oblique, et aura par conséquent pour cercle générateur, sa base circulaire. Remarquons que cette dernière ellipse a ses deux axes égaux aux deux axes de l'ellipse précédente figure 4; donc ces deux ellipses sont égales et semblables, peuvent convenir également à un cylindre droit ou oblique, et peuvent avoir indifféremment pour cercle générateur, la base circulaire de l'un ou l'autre de ces deux cylindres qui sont cependant très différentes. Nous verrons par la suite que cette même ellipse peut encore appartenir à un cône.

Première manière de construire l'Ellipse.

PROBLÈME 29 (fig. 2, pl. 12). *Les deux axes d'une Ellipse étant donnés, construire cette Ellipse.*

Concevons que le cercle ABCD, ou bien seulement le demi-cercle ABC, tourne sur le diamètre AB jusqu'à ce qu'il soit dans une position verticale (ou perpendiculaire au plan horizontal); alors C aura *c* pour projection horizontale, et sera élevé au-dessus de ce point de la hauteur du rayon, ou bien A*c*B sera la projec-

tion horizontale du demi-cercle ACB. Par ce mouvement, C aura décrit un arc de 90° et aura passé successivement au-dessus de tous les points du rayon C*c*; il en sera de même du point D à l'égard du rayon DC. Concevons que le quart de cercle décrit dans l'espace par C, soit couché dans le plan horizontal en ayant tourné sur C*c*, nous aurons l'arc AC. Pendant le mouvement du demi-cercle, le point E, extrémité de la demi-corde E*e*, aura décrit un quart de cercle E*x* dont le rayon est E*e*, le point *e* sera par conséquent la projection horizontale de E. Il est évident qu'il en serait de même de tout autre point de cette demi-circonférence; mais si le demi-cercle se fût arrêté dans son mouvement à l'instant où C se trouvait au-dessus de c', alors la projection horizontale du rayon C*c* serait $c'c$: il en sera de même à l'égard du point E; ainsi la demi-corde *e*E aurait pour projection la droite ee'. Ces deux projections seront donc entre elles dans le même rapport que leurs rayons, c'est-à-dire que $Cc : Ee :: c'c : e'e$. Donc ee' sera une quatrième proportionnelle aux trois droi tes *c*C, *e*E, cc'. Les points $c'e'$ seront donc à la circonférence de l'ellipse; donc l'arc $c'e'$ sera la projection de l'arc de cercle CE. Par conséquent l'ellipse entière sera la projection du cercle incliné au plan horizontal selon l'angle $C'c$C. D'après ce qui vient d'être dit, nous pouvons facilement construire l'ellipse demandée. Soient AB, $d'c'$, les deux axes donnés. Du centre *c*, intersection des axes avec A*c*, ou *c*B comme rayon, décrivons un cercle sur la circonférence duquel nous prendrons à volonté autant de points que nous jugerons à propos, tels que C, E, F, etc. De chacun de ces points abaissons sur AB autant de perpendiculaires; formons ensuite l'angle de réduction (que nous connaissons) en portant sur une droite quelconque *gh* figure X, le rayon *c*C. De *h*, comme centre avec ce rayon nous décrirons un arc indéfini sur lequel nous porterons le demi-axe cc', de *g* en *i*, et nous mènerons la droite *ih*. Voulons-nous avoir un point tel que *f*? prenons

Fe, que nous porterons sur l'angle de *h*, en *k*, nous décrirons un arc qui coupera *hi* en un point *l*, nous prendrons la corde *kl*, que nous porterons sur AB, de *e* en *f*, et ainsi des autres. Par tous les points que nous aurons trouvés, nous ferons passer la courbe demandée.

On nomme *ordonnée* toute perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence d'un cercle sur le diamètre, telle que C*c*, E*e*, F*e*, etc.; et dans une ellipse, toute perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur l'un des axes, est nommée *ordonnée à cet axe*. Il reste encore beaucoup de lignes à connaître dans l'ellipse, mais comme nous n'avons besoin que de quelques-unes d'entre elles, nous les nommerons à mesure quelles se présenteront.

Autrement. Soient *ab*, *cd* figure 2 bis, les deux axes donnés. Si dans une ellipse nous prenons le demi-grand axe *ae* comme rayon, et que de *c* comme centre, nous décrivions un arc qui coupe le grand axe en deux points *f*, *g*, qu'on nomme *foyers*, ces points auront cette propriété, que si de l'un d'eux nous menons à un point quelconque *h* de la circonférence, une droite *fh*, et que de ce dernier point nous menions à l'autre foyer une droite *hg*, la somme de ces deux lignes sera égale au grand axe, ce qui est évident pour le point *c*, puisque *cf*, *cg*, sont chacune égale à la moitié de ce grand axe. Ainsi *fh* plus *hg* égale *ab*. De cette propriété, il résulte une seconde manière de construire l'ellipse. Pour cela, divisons le grand axe, en partant du foyer *f*, en un nombre quelconque, tel que *fi*, etc. Le grand axe se trouvera partagé en deux parties inégales *ai*, *ib*. Prenons *ai* pour rayon, et de chacun des foyers comme centre; décrivons de part et d'autre les quatre arcs *j*, *k*; ensuite prenons l'autre partie *ib* pour rayon; et, des mêmes foyers, comme centres, coupons ces quatre angles, et les intersections *h*, etc., seront autant de points à la circonférence de l'ellipse.

Voici une autre propriété qu'il nous importe beaucoup de connaître.

Si dans une ellipse, figure 3, nous menons à volonté des droites *ab*, *cd*, *ef*, etc., parallèles entre elles, et que nous les divisions en deux parties égales aux points *g*, *h*, la droite *ij*, qui passera par ces points, passera aussi par le centre de l'ellipse, et par conséquent sera un diamètre. Celle des parallèles qui passera aussi par le centre, comme *cd*, sera de même un diamètre; mais il sera conjugué au premier, c'est-à-dire qu'il répondra (ainsi que nous l'avons déjà vu) à deux diamètres perpendiculaires entre eux dans le cercle générateur de cette ellipse. Si par les extrémités *ij*, *cd*, de ces diamètres conjugués nous menons des parallèles à l'autre diamètre, ces lignes seront tangentes à l'ellipse, et répondront aussi aux tangentes des points correspondans dans le cercle générateur, et le rhombe *klmn*, formé par ces lignes, répondra au carré *komp*, formé par les tangentes du cercle. Ces propriétés nous seront utiles dans bien des cas; car il arrive souvent dans les Projections et dans la Perspective, de n'avoir pour construire une ellipse, que deux diamètres conjugués, ce qui obligerait de chercher un grand nombre de points, ne connaissant pas les axes. Il est donc important pour nous de connaître le problème suivant.

Problème 30 (fig. 4). *Etant donnés deux diamètres conjugués d'une Ellipse, trouver les deux axes.*

Nous avons déjà vu qu'une ellipse quelconque pouvait toujours être considérée comme étant le résultat de l'intersection d'un cylindre à base circulaire, droit ou oblique, ainsi que nous pouvons le voir figure Z, dans laquelle un cylindre oblique est coupé parallèlement à sa base par le plan *ab*, et obliquement à cette même base par le plan *bc*. Soient ab', $c'd'$, les deux diamètres

conjugués donnés; il s'agit premièrement de trouver le cercle générateur de l'ellipse à laquelle ces diamètres appartiennent. Par l'extrémité a, de l'un des diamètres ab', par exemple, menons une droite EF, parallèlement à l'autre diamètre $c'd'$. Cette droite sera considérée comme étant la commune section des plans coupans le cylindre. Par a, abaissons sur EF, une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle nous porterons, comme rayon, le demi-diamètre $c'g'$, ou $g'd'$, de a en g, et de g, comme centre, nous décrirons un cercle, qui sera le cercle générateur cherché. Comme tous les points de l'ellipse doivent correspondre à ceux du cercle, joignons les centres du cercle et de l'ellipse par la droite gg'; cette ligne nous servira de directrice pour trouver dans le cercle les projections des deux diamètres conjugués donnés. Cherchons d'abord le diamètre ab', le point a étant commun à l'ellipse et au cercle, est tout trouvé; de l'autre extrémité b', menons une parallèle à $g'g$, prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en un point b, et la droite ab sera la projection cherchée de ab'. Comme deux diamètres conjugués répondent dans le cercle à deux diamètres perpendiculaires, et que ab est l'un d'eux, pour avoir l'autre, nous n'avons donc qu'à lui mener perpendiculairement le diamètre cd. (Dans l'opération qui nous occupe, nous aurions pu nous dispenser de chercher ce second diamètre.) Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de suspendre cette construction, que nous reprendrons dans un instant. Supposons le problème résolu, et que les deux axes que nous cherchons soient $h'i'$, $k'l'$: prolongeons ces axes jusqu'à la rencontre de EF aux points m, n; de ces points et par g, centre du cercle, menons des droites indéfinies; ces lignes se couperont à angle droit, et nous donneront les diamètres hi, kl, qui seront les projections des deux axes de l'ellipse. Supposons maintenant que nous n'avons ni les axes, ni leurs projections, qu'il ne nous reste seulement que les points m et n; nous allons voir qu'avec le seul secours de ces

deux points, nous pouvons trouver, non-seulement les axes, mais encore leurs projections. Nous n'avons pour cela qu'à mener par les centres gg', les droites indéfinies mg', mg, ng', ng, nous aurons les directions des axes, et dans le cercle les diamètres *kl*, *hi*, qui sont les projections des axes; par conséquent si des extrémités *hi*, *kl*, de ces diamètres, nous menons des parallèles indéfinies à gg', ces lignes couperont les directions des axes aux points $h'i'$, $k'l'$, et ces axes seront déterminés. Nous devons sentir que nous aurions pu ne déterminer qu'un seul point de chaque axe, par exemple h' et k', et porter $h'g$, de g' en i', et kg' de g' en l'.

Il ne s'agit donc plus que de trouver ces deux points m, n. Observons que ces points sont les extrémités du diamètre d'un cercle dont la circonférence passe par les centres g, g', de l'ellipse et du cercle. Il ne nous reste donc plus qu'à trouver le centre de ce cercle, ce qui n'est pas difficile dans ce cas-ci, puisque gg' se trouve être par hasard un des diamètres de ce cercle; par conséquent ce centre sera en o. Mais il n'en est pas toujours de même; le plus souvent la droite qui joint les deux centres se trouve être une corde au lieu d'être un diamètre; alors on élève, sur le milieu de cette corde, une perpendiculaire qui coupe la commune section des deux plans, et l'intersection est le centre cherché. Nous prendrons donc og ou og' pour rayon, et nous décrirons un cercle qui coupera EF aux points m, n, le reste, etc.

Nous allons résoudre le premier problème en sens inverse du précédent, afin de nous bien convaincre de la généralité du principe. Soit $a'b'$, c'd, fig. 1, pl. 13, les deux diamètres conjugués donnés, absolument les mêmes que ceux de l'exemple précédent. Nous avons commencé par mener une parallèle au plus petit des deux diamètres; dans cet exemple, nous ferons le contraire. Par l'extrémité d, du diamètre c'd, menons une parallèle à $a'b'$ et de d; abaissons à cette parallèle EF, une perpendiculaire dg, égale à $a'g'$; de g comme centre et de gd comme rayon, décrivons le

cercle générateur; joignons les deux centres par une droite gg'; du milieu p, de cette ligne abaissons une perpendiculaire qui coupera EF, en un point o, qui sera également éloigné des deux centres gg', et sera lui-même le centre d'un cercle qui passera par gg', et qui coupera EF, aux points m, n; de chacun de ces points, menons par les centres gg', des droites indéfinies qui nous donneront les directions des axes, ainsi que les projections de ces mêmes axes. Du point h, menons une parallèle à gg', qui coupera la direction du grand axe en h'; portons $h'g'$, de g' en i', et nous aurons le grand axe; de l menons une parallèle à gg', cette ligne coupera la direction du petit axe, en un point l'; portons $l'g'$, de g' en k', et nous aurons le petit axe $k'l'$. Nous pourrons alors décrire facilement l'ellipse par des moyens que nous connaîtrons sous peu, et qui sont beaucoup plus expéditifs que ceux que nous avons vus, jusqu'ici, mais qu'il était important pour nous de connaître. Nous voyons, ainsi que nous l'avons déjà dit, que gg' pouvait être une corde du cercle dont o est le centre; nous avons vu en Géométrie qu'une perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passait nécessairement par le centre du cercle : or comme la droite EF, passe aussi par le centre du même cercle, l'intersection de ces deux lignes sera nécessairement le centre o. Nous pouvons encore nous assurer que par cette opération, les axes ainsi que leurs projections, sont réellement perpendiculaires entre eux; car n, g', g'm, sont les côtés d'un angle dont le sommet g' est à la circonférence, et dont les côtés sont appuyés sur les extrémités du diamètre. Il en sera de même de l'angle mgn. Nous nous sommes un peu étendus sur cette opération, parce que cela était indispensable pour la faire comprendre des personnes qui ne veulent pas se contenter d'un moyen purement mécanique. D'ailleurs nous aurons fréquemment l'occasion de faire cette opération, et d'en appliquer les principes.

PROBLÈME 31 (fig. 2). *Par un point a, donné sur la circonférence d'une Ellipse, mener une tangente à cette courbe.*

Menons aux foyers les droites *ab*, *ac*; portons *ab* sur le prolongement de *ac*; de *a* en *d*, menons la droite *db*, et du point donné *a*, abaissons sur *db* une perpendiculaire, qui sera la tangente demandée. Ou bien portons *ab* sur *ac*, de *a* en *e*, menons la droite *eb*, sur laquelle nous abaisserons une perpendiculaire du point *a*; ensuite par *a*, extrémité de la perpendiculaire *af*, menons une parallèle à *be*, ou une perpendiculaire à *af*; cette ligne *gh* sera la tangente cherchée. Observons que l'angle *eab* est divisé en deux parties égales par la perpendiculaire *af*; mais *af* est perpendiculaire à *gh*; par conséquent *ea*, *ba*, sont également inclinés sur *gh*; l'angle *eah* ou *cah* est donc égal à l'angle *bag*. Considérons pour un moment *gh*, comme étant la trace ou le profil d'un plan; concevons de plus qu'un corps élastique tel qu'une balle, un rayon de lumière, etc., soit lancé de *c*, vers le plan *gh*, au point *a*; l'expérience et l'observation nous ont appris que ce corps élastique après avoir touché le plan *gh* en *a*, sous l'angle *cah*, se réfléchira sous l'angle *bae*; et comme de tous les points de la circonférence d'une ellipse, nous pouvons mener une tangente, il s'ensuit qu'un corps élastique qui serait lancé de l'un des foyers à un point quelconque de la circonférence, serait réfléchi à l'autre foyer. Ainsi une personne placée au foyer d'une salle de forme elliptique, et qui parlerait assez bas pour ne pas être entendue d'une autre personne qui serait placée en *i*, serait entendue d'une personne placée à l'autre foyer *b*. L'angle sous lequel est lancé un corps comme l'angle *cah*, se nomme *angle d'incidence*, et celui sous lequel ce corps est réfléchi, se nomme *angle de réflexion*; tel est l'angle *bae*. D'où nous pouvons con-

clure que l'*angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion et réciproquement.*

PROBLÈME 32. *Un point étant donné hors d'une Ellipse, mener une tangente à cette courbe.*

Soit *h* le point donné; menons de ce point à chacun des foyers les droites *hb*, *hc*, puis de *h*, comme centre, avec chacune de ces lignes comme rayon, décrivons les arcs indéfinis *bd*, *ck*; prenons l'axe *lm* comme rayon, et de chacun des foyers, comme centre, décrivons sur l'arc opposé un second arc qui coupera chacun des premiers aux points *d*, *k*; par chacun de ces points et par les foyers, menons les droites *bk*, *cd*; elles couperont la circonférence de l'ellipse aux points *a*, *n*, qui seront les points par lesquels et par *h*, nous menerons les tangentes *hag*, *hno*. Il suit de ce problème que si, par un point donné sur la circonférence de l'ellipse, nous voulions mener une perpendiculaire à cette courbe, nous n'aurions qu'à mener de ce point une perpendiculaire à la tangente.

PROBLÈME 33 (fig. 3). *Les deux axes* AB, CD, *d'une Ellipse étant donnés, trouver autant de points à cette courbe qu'on voudra, sans tracer une seule ligne.*

Supposons pour l'instant l'ellipse tracée. Ajoutons le demi-petit axe *e*C, sur le prolongement du grand axe de A en *c*; le point A sera évidemment à l'ellipse, et la droite *ce* sera égale à la somme des deux demi-axes. Si nous faisons mouvoir cette ligne de manière que ses deux extrémités soient toujours sur les directions des deux axes, telles sont les droites $c'e'$, $c''e''$, etc., dans ces différentes positions, le point A se trouvera successivement en *a*, a', etc.; mais toujours à la circonférence de l'ellipse. *Autrement*, posons le demi-petit axe *e*D, sur le grand de B, en *d*;

de sera la différence des deux demi-axes, et B sera à la circonférence. Faisons mouvoir cette ligne *e*B, de manière que les deux points *d*, *e*, de la différence soient toujours sur la direction des deux axes, comme $d'e'$, $d''e''$, etc., B se trouvera successivement en *b*, b', etc., et toujours à la circonférence de l'ellipse. De cette propriété résultent deux manières très simples de trouver, facilement et sans aucune opération, un nombre de points suffisans pour tracer la courbe elliptique. L'application graphique de ce moyen est fréquemment employée dans les projections, la Perspective, etc. Ce procédé est le suivant. Coupons proprement deux bandes de papier telles que Y, Z, figure 4, avec une règle et un canif; marquons par des points sur ces bandes les deux demi-axes, tels que nous venons de le dire; ajustons l'un ou l'autre de ces papiers, ainsi que nous le voyons dans cette figure, et marquons avec un crayon les points à l'ellipse *a*, *b*, etc., et en continuant autant que nous le jugerons à propos.

Mais nous pourrions nous trouver dans le cas (ce qui arrive quelques fois) de n'avoir qu'un axe et un point à l'ellipse, et cependant il nous faudrait avoir l'autre axe. Soit, par exemple, l'axe AB, et un point *a* donné; il s'agit de trouver le petit axe CD. Sur le milieu de l'axe donné, nous menerons de part et d'autre une perpendiculaire indéfinie, qui sera la direction de l'autre axe. Nous prendrons une règle ou bande de papier Y sur laquelle nous marquerons un point à volonté, tel que e'; nous poserons cette règle de manière qu'elle touche le point donné *a*, et que le point e', que nous avons pris à volonté, soit sur la direction de l'axe que nous cherchons; l'endroit où la règle coupera le prolongement du grand axe, sera le point *c* cherché; nous le marquerons avec un crayon, et *ac* sera le demi-petit axe, que nous porterons du centre *e*, de part et d'autre en C et en D. Nous pourrons ensuite décrire le reste de l'ellipse sans difficulté. La figure indique

suffisamment que nous pourrions faire la même chose avec la règle Z, c'est pourquoi nous n'en dirons pas davantage à ce sujet.

Du Cône.

PROBLÈME 34. *Étant donné un Point dans l'une des projections du Cône à base circulaire, trouver la projection de ce point dans l'autre projection du Cône* (fig. 1, pl. 14).

D'après ce que nous avons dit sur la génération du cône (Géométrie), ce problème ne doit présenter aucune difficulté. Soit *a* le point donné dans la projection horizontale. Nous savons déjà que ce point appartient également à un cercle ou à une ligne droite. Élevons d'abord de ce point *a* une verticale indéfinie sur laquelle doit se trouver la projection verticale de ce point. Il ne s'agit plus que d'en déterminer la hauteur. Concevons un plan horizontal coupant le cône parallèlement à sa base, et passant par le point *a*; le résultat de cette coupe sera un cercle qui coupera le diamètre BC, aux points *d*, *e* : mais comme B*f*, et C*f*, sont les projections horizontales des côtés bf', cf', les verticales élevées des points *d*, ou *c*, détermineront les projections verticales de ces points, en d', ou *e*; et comme ces points sont les projections verticales des extrémités du diamètre *de*, il s'ensuit que la droite $d'e'$ sera la projection verticale du cercle *dae*; et puisque *a* appartient à ce cercle, a' appartiendra de même à $d'e'$, projection du même cercle, et comme il se trouve aussi sur la verticale élevée de *a*, ce point a' sera donc le point cherché. Dans la pratique, nous pouvons nous dispenser de décrire entièrement ce cercle; il nous suffit de prendre la distance *fa* comme rayon, et de *f* comme centre, nous couperons le diamètre BC en un point *d* ou *e*. De l'un de ces points nous éleverons une perpendiculaire qui coupera le

côté bf' ou cf' en un point d' ou e'. De l'un ou l'autre de ces points, nous menerons une horizontale qui coupera la verticale élevée de a en un point a', qui sera le point cherché.

Autrement. Concevons un plan vertical passant par f, projection horizontale du sommet, et par le point donné a, la trace de ce plan sera fg, et sa projection verticale $f'g$, qui coupera la verticale élevée de a en a'. Ce point d'intersection sera donc le point cherché. Cette seconde manière pourra nous servir à trouver la même projection d'un point donné dans la projection horizontale d'un cône à base irrégulière, figure 2, ce que nous n'aurions pas pu faire par la première manière. Il peut arriver un cas particulier dans lequel nous pourrions être embarrassés, en voulant nous servir de cette seconde manière. Par exemple, si le point donné eût été placé en h au lieu d'être en a, nous n'aurions pas pu avoir l'intersection de deux lignes, puisque les projections de ces deux droites se confondent dans un même plan perpendiculaire aux deux plans de projections. Comme dans le cas précédent, concevons un plan vertical passant par le sommet f, par le point donné h et par la base en i; couchons ce plan dans le plan horizontal en le faisant tourner sur sa trace fi, ou ce qui revient au même du point f, élevons sur fi une perpendiculaire indéfinie sur laquelle nous porterons la hauteur du cône if', de f en F; nous menerons Fi, qui sera le côté du cône dont fi est la projection horizontale, et le triangle rectangle ifF, représentera la coupe verticale du quart du cône fi. Maintenant, si de h, nous élevons sur fi une perpendiculaire qui coupera iF en H, ce point sera le point cherché, nous prendrons la hauteur hH, que nous porterons dans le plan vertical de i en h'. Si le point proposé eût été donné dans la projection verticale comme en h', a', etc., nous devons voir qu'il nous aurait fallu faire l'inverse de ce que nous venons de faire. Cependant comme nous pourrions encore être embarrassés, nous allons résoudre le cas

particulier où le point serait donné en h' figure 2. Prenons fi, que nous porterons sur kl de f en i′; menons i′f'; de h' menons une horizontale qui coupera i′f' en H′; prenons hH′, que nous porterons dans la projection horizontale de f en h, qui sera le point cherché.

Des différentes sections du Cône droit ou oblique à base circulaire (figure 3).

Un cône peut être coupé par un plan de cinq manières différentes, et les sections qui en résultent sont nommées sections coniques. Soit le cône abc'; 1° si le plan coupant passe par l'axe c'd, la section sera un *triangle* qui aura cet axe pour hauteur, pour base le diamètre, et pour côtés, les côtés de ce même cône. Si le plan coupant passait seulement par le sommet sans passer par l'axe, comme par c'e, la section serait encore un triangle qui aurait pour base la corde EF, pour hauteur la droite ec', et pour côtés, les côtés du cône qui ont pour projections verticales la droite ec', et pour projections horizontales les droites Ec, Fc; en un mot, le triangle qui résulte de cette coupe aurait pour projection horizontale le triangle EcF. Nous devons facilement voir que la base du triangle de cette coupe diminuera à mesure que le plan coupant s'éloigne du centre de la base du cône. Enfin, si ce plan passait par le sommet c' et par l'extrémité a de la base, alors il n'y aurait plus de section, le résultat serait la ligne de tangence ac' du plan et du cône, dont la projection horizontale serait la droite Ac. 2°. Si le cône est coupé parallèlement à sa base comme $g'h'$, la section sera un *cercle* dont $g'h'$ sera le diamètre, et dont le centre sera en j' sur l'axe; la projection horizontale de cette coupe sera le cercle dont le diamètre est gh. Il est évident que le diamètre de chacun des cercles résultans des différentes sections d'un cône, coupé par un plan parallèlement

à sa base, diminuera en raison de la distance du plan coupant à la base de ce cône; en sorte qu'il ne sera plus qu'un point lorsque le plan coupant passera par le sommet c'. 3°. Lorsqu'un cône est coupé selon la droite ah', de manière que le plan coupant puisse rencontrer les deux côtés ac', bc', la section qui résultera de cette coupe sera une *ellipse* dont le grand axe sera égal à la droite ah', et dont le petit axe sera la corde du cercle provenant de la coupe $s't'$, dont le plan passe par m', milieu du grand axe ah'. Ainsi m' sera le milieu de la corde ou petit axe, qui sera égal à la projection horizontale *kl*. 4°. Si un cône est coupé par un plan, parallèlement à un de ses côtés, comme nh' qui est parallèle au côté ac', la section qui en résultera sera terminée par une courbe nommée *parabole*, qui peut être considérée comme étant une ellipse infiniment alongée. La hauteur de cette parabole sera la droite nh', sa base sera *op*, et sa projection horizontale sera *opho*. 5°. Enfin, lorsqu'un plan coupe un cône de manière que le cône opposé (formé par le prolongement des côtés du premier) se trouve aussi coupé, tel est le plan qh', la courbe qui résultera de cette coupe est nommée *hyperbole*. Puisque le plan coupant se trouve par hasard être perpendiculaire au plan horizontal et vertical, les deux projections de cette courbe seront les droites qh', *qr*. La projection qh' de l'hyperbole couchée dans le plan vertical est la figure 5. Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettant pas d'examiner les propriétés de ces différentes espèces de courbes, qui sont du ressort des Sections coniques, nous nous occuperons seulement des projections de ces courbes.

Pour résoudre ces problèmes, il ne s'agit que de nous rappeler les différentes manières de trouver la projection d'un point donné sur l'une ou l'autre projection du cône. Soit, par exemple, à chercher la coupe par le plan ah'; prenons à volonté sur ce plan plusieurs points tels que m', etc.; abaissons de ce point une perpendiculaire au plan horizontal, sur laquelle doit se trouver la projection hori-

zontale de m'; menons par ce même point une parallèle à yz, que nous considérerons comme étant la trace verticale d'un plan coupant; la section faite par ce plan sera un cercle dont le rayon sera $s'u'$, ou $u't'$; ouvrons le compas de la grandeur de ce rayon; posons-en une pointe en c, et avec l'autre, coupons la perpendiculaire abaissée de m' aux points k, l, qui seront les projections cherchées des points à la circonférence de l'ellipse. Il en sera de même de tous les autres points que nous pourrions prendre sur la trace du plan ah'. Nous devons observer qu'on peut souvent abréger l'opération, comme dans le cas présent : si m' est sur le milieu de ah', kl sera le petit axe d'une ellipse dont Ah sera le grand axe. Dans ce cas, le seul point m' nous suffira donc, puisque nous pouvons finir cette ellipse avec la règle de papier. Pour la coupe nh' de la parabole, nous serons obligés de chercher plusieurs points, tels que v', u', $2'$, etc. Observons que nous n'avons ici que les projections de ces différentes coupes, et qu'il est souvent utile d'avoir leurs développemens tels qu'ils doivent être; c'est ce dont nous allons nous occuper. 1°. L'ellipse provenant de la coupe ah' aura pour grand axe ah', ainsi que nous l'avons déjà dit, et pour petit axe la corde kl du cercle dont le diamètre est $s't'$. Quant à la parabole nh' et à l'hyperbole qh', nous allons les construire séparément (fig. 4).

Menons deux droites indéfinies perpendiculaires entre elles, telles que op, nh'; prenons sur la projection horizontale (fig. 3), la grandeur mo, que nous porterons (fig. 4) de n en o et en p; prenons de même xv que nous porterons, de part et d'autre, de n en v, ainsi que y, u, 2, etc., que nous porterons de n en u, de n en z, etc.; de chacun de ces points, élevons des perpendiculaires à op, sur lesquelles nous porterons les hauteurs respectives de chacun de ces points; par exemple, nv' sera porté sur op, de v en V; nu', de u en U, etc., et nous mènerons la courbe h', 2UVo, qui sera la parabole cherchée. Pour l'hyperbole qh',

menons deux perpendiculaires d*d*, *cc'* (fig. 5), que nous ferons égales, savoir d*d*, au diamètre de la base du cône de la figure 3, et *cc'* égale à la hauteur du même cône; de *c*, comme centre, avec le rayon *c*d, décrivons un demi-cercle qui sera la projection horizontale de la moitié du cône, et le triangle d*c'*d sera la projection verticale de ce même cône. Prenons sur la figure 3, *ch*, qui est la distance du plan *qr*, au centre *c*, et portons-la de *c* en *h*; par ce point *h*, menons parallèlement à d*d* le plan *qr*, que nous diviserons en autant de parties que nous jugerons à propos, telles que *q*1, 12, 23, 3*h*, etc.; par chacun de ces points élevons une perpendiculaire au plan vertical, sur laquelle nous chercherons la hauteur du point correspondant, par exemple le point *h*; de *c* comme centre, avec un rayon *ch*, décrivons le quart de cercle *h*h; élevons la verticale hH, qui coupera *c'*d en H; de ce point, menons une horizontale qui coupera la verticale élevée de *h* en *h'*, qui sera le point cherché. Il en sera de même du point 3, ainsi que de tous les autres.

De la Sphère.

Problème 35 (fig. 1, pl. 15). *Un point étant donné dans l'une des projections de la Sphère, trouver ce point sur l'autre projection.*

Nous avons déjà vu qu'un point quelconque à la surface d'une sphère appartenait toujours à un cercle de cette sphère, grand ou petit. Donc, si nous faisons passer par *a* un plan vertical *bc*, parallèlement à *yz*, la section de la sphère, par ce plan, sera un cercle qui aura pour diamètre la droite *bc*, et par conséquent pour rayon *cd* ou *bd*; le point sera donc à la circonférence de ce cercle; le centre *d* de ce cercle sera nécessairement à la hauteur du centre de la sphère, puisqu'il est situé sur l'axe horizontal de cette même sphère; et comme cet axe *vx* est perpendiculaire au

plan vertical, il en résulte que d' sera la projection verticale du centre d. Par conséquent, si de ce point, comme centre, avec un rayon cd, nous décrivons un cercle, il sera la projection verticale de la coupe par le plan bc. Il est évident que la projection verticale du point donné a, doit se trouver sur la circonférence de ce cercle; mais cette même projection doit aussi se trouver sur la verticale élevée du point a; elle doit donc se trouver à l'intersection de cette ligne et du cercle; elle sera donc en a', ou en a'', selon que le point donné a doit se trouver à la partie supérieure ou inférieure de la sphère. Nous aurions pu trouver cette projection par une opération inverse, qu'il nous est nécessaire de connaître.

Concevons un plan horizontal coupant la sphère et passant par le point a; la section sera un cercle horizontal qui aura ak pour rayon; la projection verticale de ce cercle sera la droite $g'e'$, ou $g''e''$, et les intersections de cette ligne avec la verticale élevée de a, nous donneront les projections cherchées $a'a''$, qui seront les mêmes que celles trouvées précédemment.

Problème 36 (fig. 2). *Étant données les traces d'un plan coupant la Sphère, trouver les projections de cette Coupe.*

Soit ab la trace horizontale du plan coupant; prenons sur cette ligne autant de points que nous le jugerons nécessaire, tels que a, c, b, etc. De chacun de ces points, élevons autant de verticales sur lesquelles doivent se trouver les projections verticales de ces points. Commençons par le point a, qui étant situé sur la circonférence du grand cercle horizontal de la sphère, doit avoir sa projection verticale sur celle de ce cercle, ainsi que sur la perpendiculaire élevée dudit point; or, la projection verticale du cercle est $a'd'$; donc la projection verticale de a sera a'. De plus, le point a appartient aussi à un des grands cercles de la sphère, dont ad est la projection horizontale; nous voyons que

le plan de ce cercle est parallèle au plan vertical de projection; par conséquent la projection verticale de ce cercle sera le cercle $ea'f'd'e$; donc a' répond à toutes les conditions que nous venons d'exposer. Le point b appartient seulement au cercle horizontal; ainsi sa projection verticale sera évidemment b'. Pour le point c, qui est situé à un lieu quelconque de la surface de la sphère, servons-nous de l'un des moyens que nous avons vus dans la figure précédente. Considérons d'abord c comme étant la projection horizontale de deux points situés dans une même ligne perpendiculaire au plan horizontal; l'un de ces points est à la partie supérieure de la sphère, et l'autre à la partie inférieure; les projections verticales de ces deux points devront donc se trouver sur une même perpendiculaire à yz, élevée de c. Pour trouver ces points, par c, menons gh parallèlement à yz; cette ligne (ainsi que nous l'avons vu précédemment) sera la trace d'un plan coupant vertical, et parallèle au plan vertical de projection; le résultat de cette coupe sera un cercle qui aura gh pour diamètre, et par conséquent gi pour rayon; prenons ce rayon avec le compas, et de b', comme centre, décrivons deux arcs qui couperont la verticale élevée de c en deux points c', c'', qui seront les points cherchés. Nous en ferons autant pour tous les autres points que nous pourrions prendre sur ab. Comme ici le point c se trouve au milieu de ab, la droite $c'c''$ se trouve perpendiculaire sur le milieu de $a'b'$, et sera par conséquent le grand axe d'une ellipse dont $a'b'$ sera le petit axe. Nous pouvons donc tracer la circonférence de cette ellipse avec la règle de papier, sans avoir besoin de chercher d'autres points.

Si la trace du plan coupant eût été donnée dans le plan vertical en $f'd'$, nous ferions le même raisonnement que pour le cas précédent, et nous aurions le même résultat dans la projection horizontale.

Des Plans tangens aux Surfaces courbes; 1° au Cylindre (fig. 3, pl. 15).

Soient les droites *ab*, *cd*, tangentes aux deux cercles générateurs *efgh*, *iklm*; comme ces cercles sont parallèles entre eux, les tangentes le seront aussi entre elles; elles seront aussi perpendiculaires aux rayons *ni*, *oe*. Si, par ces deux tangentes nous faisons passer un plan *ad*, ce plan sera perpendiculaire au rectangle *io*, et la génératrice *ei* sera par conséquent la ligne sur laquelle se trouveront les points de tangence de tous les cercles que nous pourrons imaginer entre les bases supérieure et inférieure de ce cylindre, puisque par la formation du cylindre par le cercle générateur, le rayon *ni* a passé par tous les points de la droite *ei*; le plan *ad* contiendra donc les tangentes de tous les cercles supposés dans ce cylindre, tels par exemple que le cercle *pqrs*, dont la tangente est *tu*; donc le plan *ad* est tangent à la surface du cylindre, selon la droite *ei*. L'axe *on* se nomme aussi la *directrice*, parce que, dans la formation du cylindre, la base en s'élevant a suivi cette direction. De même lorsque nous considérons le cylindre formé par la rotation du rectangle *oi* sur le côté *no*, nous voyons que la génératrice *ei* est nécessairement parallèle à la directrice *no*; nous devons voir aussi que *i* est le point de contact de la génératrice *ie* et du cercle générateur *iklm*, par lequel passe la tangente *cd*. Donc, si, par un point de tangence pris sur la circonférence du cercle générateur d'un cylindre, nous menons une droite parallèle à la directrice, cette droite sera la ligne d'attouchement du plan tangent à la surface du cylindre. Il en sera de même du cylindre oblique.

Le cône (fig. 4) diffère du cylindre en ce que la génératrice *ab* n'est pas parallèle à la directrice *cb*, et qu'elle passe toujours par le sommet du cône.

2°. *Du Plan tangent à la surface de la Sphère* (fig. 5).

Soit un plan *ab* perpendiculaire à l'extrémité du rayon *ce*; si nous prenons un point quelconque *f* sur ce plan, et que nous menions les droites *fc*, *fe*, nous aurons un triangle rectangle en *e*, et dont l'hypoténuse *cf* sera plus grande que le côté *ce*; mais comme *ce* égale le rayon *cg*, le point *f* sera donc hors de la sphère; et comme il en serait de même de tout autre point pris dans le plan *ab*, il s'ensuit que ce plan ne peut avoir qu'un seul point *e* qui lui soit commun avec la surface de la sphère. Donc, *tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon de la sphère est tangent à cette même sphère.*

Cette propriété peut encore se démontrer de cette manière.

Si la droite *ef* est perpendiculaire au rayon *ce* du cercle *diek*, cette ligne sera par conséquent tangente à ce cercle; et si la droite *en* est aussi perpendiculaire au même rayon *ce* (lequel rayon dans ce cas peut appartenir au cercle *dlem*), cette ligne sera de même tangente à ce dernier cercle. Or, deux droites qui se coupent sont dans un même plan, puisqu'elles ont trois points *f*, *e*, *n*, qui ne sont pas en ligne droite. Donc, si nous faisons passer un plan *ab* par ces deux droites, ce plan sera perpendiculaire au rayon *ce* et tangent aux deux cercles, ainsi qu'à tout autre cercle qui aurait avec ces deux-ci *de* pour diamètre commun; ce plan sera donc tangent à la surface de la sphère. Les deux cercles *diek*, *dlem*, sont également générateurs de la sphère; par conséquent leurs circonférences seront deux courbes génératrices qui passeront par le même point *e*, et les droites *fe*, *ne*, seront des tangentes à ces mêmes courbes et passeront aussi par le point de contact *e*. Donc, *si par le point de contact de deux courbes génératrices on fait passer deux tangentes, ces tangentes détermineront le plan tangent à la sphère.*

PROBLÈME 37 (fig. 6). (*Analogue à l'article de la page 135, figure 3*). *Par un point donné à la circonférence de la base circulaire d'un Cylindre droit, mener un plan tangent à ce Cylindre.*

D'après ce qui vient d'être dit, nous devons facilement résoudre ce problème. Soit e le point donné dans le plan horizontal; menons le rayon oe, auquel nous mènerons par son extrémité e une perpendiculaire ab tangente au cercle, et qui sera la trace du plan tangent cherché; de e, élevons une verticale qui nous donnera ei' pour la ligne d'attouchement du plan tangent, qui est parallèle à la directrice on'. La figure 7 est absolument l'inverse de celle-ci. Si le point eût été donné à volonté sur la surface du cylindre, comme a (fig. 1, pl. 16) dans la projection horizontale, nous mènerions d'abord par ce point une droite bc, parallèle à l'axe de; cette ligne bc serait la projection horizontale de la ligne d'attouchement ou de tangence du plan et du cylindre. Maintenant, cherchons la projection verticale de a (ce que nous savons déja faire), qui sera a'; par ce point, menons une droite $b'c'$, parallèle à l'axe $d'e'$; cette droite $b'c'$ sera la projection verticale de bc ou de la ligne d'attouchement. Il nous reste encore à déterminer les traces du plan tangent. Couchons, dans le plan horizontal, le cercle de la base fg; prolongeons cb jusqu'en B, qui sera le point de tangence du plan sur la base; menons le rayon DB, ainsi que la tangente qui coupera le prolongement de gf, en H, et la tangente IH sera le profil du plan cherché, dont iH sera la projection horizontale, tandis que l'angle IHi sera la mesure de l'inclinaison du plan tangent sur le plan horizontal. De H, menons Hj, parallèle à l'axe de; cette ligne Hj sera la trace ou l'intersection du plan tangent avec le plan horizontal. De I, menons une parallèle à Hj, nous aurons ik pour la projection horizontale de la limite supérieure du plan ij. Nous avons maintenant tout ce

qu'il nous faut pour construire la projection verticale. Lorsqu'un point est donné sur la surface d'un cylindre, comme dans le cas présent, nous devons faire attention si le plan doit être tangent à la partie supérieure ou inférieure du cylindre, ce que nous allons voir dans l'exemple suivant (fig. 2).

Soit *a* le point donné dans la projection horizontale d'un cylindre oblique à base circulaire; menons par ce point une droite indéfinie parallèle à l'axe *bc*; cette droite coupera les deux bases du cylindre, chacune en deux points *d*, *e*, *f*, *g*, qui seront les extrémités des deux lignes de tangence *df*, *eg*, supérieure et inférieure. Pour procéder avec un peu d'ordre, nous ne considérerons d'abord qu'un seul de ces plans, par exemple, le plan supérieur qui doit toucher le cylindre selon la droite *df*. La projection verticale de *d* sera d, celle de *f* sera *f*'; puisque ces deux points sont les projections verticales des extrémités de la ligne de tangence, menons donc la droite d*f*', qui sera cette ligne de tangence. Par *a*, élevons une verticale indéfinie qui coupera d*f*' en *a*'; ce point sera la projection verticale de *a*. Pour avoir maintenant les traces du plan tangent, menons par *d* la tangente indéfinie H*d*b, qui sera la trace horizontale cherchée; et b*j*', qui se trouve dans le plan de l'axe *bc*, sera la trace verticale de ce même plan. Si nous voulons limiter ce plan, prenons sur la trace horizontale b*d*, prolongée, un point quelconque tel que H, qui aura pour projection verticale h; de ce point, menons une droite h*i*', qui soit parallèle à la projection verticale du cylindre; cette ligne sera une des limites cherchées. Il en sera de même des limites bj, b*j*', ij, *i*'*j*', etc. Cherchons maintenant le second plan tangent à la partie inférieure du cylindre. Par *e*, second point où la droite *dg* coupe la base inférieure du cylindre, menons la tangente b*e*K, et opérons pour le reste de la même manière que pour le premier plan. Nous devons voir que si le point *a* eût été donné hors la projection du cylindre, par exemple en b ou

ailleurs, l'opération serait encore la même. Afin de concevoir plus facilement cette opération, consultons la figure 3 en perspective. D'après ce que nous venons de dire du cylindre, les figures 4, 5, n'ont pas besoin d'explication, les lettres étant à peu près les mêmes que dans la figure précédente.

Problème 38 (fig. 6). *Par un Point donné sur la surface de la Sphère, mener un plan tangent à la surface de cette Sphère.*

Soit a le point donné dans la projection horizontale. Comme dans le cylindre, nous devons considérer si ce point doit être situé à la partie supérieure ou inférieure de la sphère : ici nous le considérerons comme étant donné à la partie inférieure. Concevons d'abord que ce point a ait tourné horizontalement jusqu'à ce qu'il soit arrivé en $a\cdot$, sur le diamètre bc, qui peut être aussi considéré comme étant la projection horizontale du grand cercle de la sphère, parallèle au plan vertical; par conséquent la projection verticale de $a\cdot$ sera $a\cdot'$. Si, par ce point, nous menons la tangente de', cette ligne sera la trace verticale d'un plan tangent à la sphère, et perpendiculaire au plan vertical; par conséquent la droite dF·, perpendiculaire à yz, sera la trace horizontale de ce même plan, qui sera incliné au plan horizontal selon l'angle e'dz. Par $a\cdot'$, menons une horizontale $a\cdot'$, g', qui coupera la verticale élevée de a en un point a', qui sera la projection verticale de a, ou du point de tangence. Concevons maintenant que le point $a\cdot$ soit retourné à sa première position a, et que le plan e'dF·, qui contient $a\cdot$ ait tourné avec ce point. Il est clair que lorsque $a\cdot$ sera en a, le point $h\cdot$ sera en h, et n'aura pas quitté le plan horizontal; par conséquent la trace dF·, qui était perpendiculaire au rayon $ih\cdot$, sera en DF, et sera toujours perpendiculaire au rayon ih. Il ne s'agit plus que de trouver la trace verticale de ce plan. Pour cela, menons la droite aa

parallèlement à la trace DF; cette ligne *a*a est perpendiculaire au rayon *ia*, comme *a*·a· l'était au rayon *ia*· avant d'avoir tourné. Cette droite *a*a étant horizontale à la hauteur du point de tangence *a'*, et située dans le plan tangent, son extrémité a appartiendra nécessairement à la trace verticale que nous cherchons; donc, en élevant une verticale par a, cette ligne coupera *a'g'* en *k'*, qui sera le point cherché. Or, D étant aussi un des points de cette trace, donc la droite D*k'*, prolongée, sera la trace verticale cherchée. Si nous limitons ce plan, nous aurons pour ses projections les rhombes ou losanges D*l*, D*l'*.

Nous pouvons obtenir le même résultat par un moyen plus direct, plus simple, et par conséquent plus expéditif, mais que nous aurions difficilement saisi, sans la connaissance du premier que nous avons employé, figure 1. pl. 17. Soit *a* le point donné (comme dans l'exemple précédent); menons par ce point *a* et par le centre *i* un diamètre que nous considérerons comme étant la trace d'un plan coupant. Si nous renversons cette coupe dans le plan horizontal, nous aurons un grand cercle de la sphère pour projection verticale de cette même coupe par le diamètre. Par *a*, élevons une perpendiculaire sur le diamètre; cette ligne coupera le cercle en A : par ce point, menons une tangente *x*A*h*, qui sera le profil du plan tangent, lequel rencontrera le plan horizontal en *h*; par ce dernier point, menons perpendiculairement au diamètre la droite D*h*F, qui sera la trace horizontale du plan tangent. Par *a*, élevons une verticale sur laquelle nous porterons la hauteur *a*A, de a· en *a'*. Le reste de l'opération se fera comme dans l'exemple précédent. La figure 2 est encore le même problème; seulement le point donné *a* est considéré comme étant situé sur la partie supérieure de la sphère, et est résolu par le dernier moyen que nous venons d'employer.

Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de faire voir seulement deux exemples de l'application des plans tangens dans la

projection des ombres. Nous voyons dans les figures 3 et 4, les ombres d'un cône et celles d'un cylindre, dont les limites sont déterminées par les intersections de plans tangens. Dans la suite de cet Ouvrage, nous nous occuperons spécialement de cette partie.

Des Intersections des Surfaces courbes.

Lorsque deux corps à surfaces courbes se pénètrent ou se coupent, les intersections de leurs surfaces forment des lignes courbes d'espèces différentes, dont les unes, comme le cercle, l'ellipse, etc., peuvent être contenues exactement dans un plan, et les autres ne le peuvent pas; ces dernières sont nommées *courbes à double courbure*. Pour avoir une idée de cette espèce de lignes, ouvrons un compas à volonté, et décrivons un cercle sur la surface convexe ou concave d'un cylindre; nous verrons d'abord que cette courbe ne peut pas être contenue dans une surface plane. Ainsi, la solution des problèmes que nous allons voir, consiste principalement à savoir trouver, de la manière la plus avantageuse, les projections d'un point sur une surface courbe; ce qui n'est autre chose qu'une application des principes que nous avons vus précédemment. La manière la plus simple et la plus générale pour construire ces intersections, consiste à concevoir ces corps coupés par des plans, suivant certaines conditions qui dépendent plus ou moins de la nature de la surface proposée. Ces plans peuvent être menés parallèlement à l'un des plans de projection; et comme tous les points des intersections de ces surfaces se trouveront sur les plans coupans, ou sur l'une de leurs projections, il sera toujours facile de construire ces courbes, en rapportant ces points sur l'autre projection de ces mêmes plans. Cette méthode peut s'appliquer à toutes les surfaces courbes en général. C'est ce que nous allons tâcher d'éclaircir par des exemples.

Problème 39 (fig. 5). *Étant données les Projections de deux Cylindres qui se coupent à angle droit, trouver les projections verticales de leur intersection.*

Concevons dans la projection horizontale une suite de plans verticaux, coupans le cylindre parallèlement à son axe *cd*; les projections verticales de toutes ces sections seront autant de parallélogrammes rectangles, semblables à celui $e'f''$ ou $e''f'$, qui est le résultat de la coupe du cylindre par le plan vertical *ef*, car ce plan coupe la surface du cylindre en dessus et en dessous. La circonférence du second cylindre, dont l'axe est vertical, se trouve aussi coupée par le même plan *ef*, aux points supérieurs *gh*, ainsi qu'en deux autres points inférieurs situés dans les mêmes verticales. Les projections verticales de ces points devant se trouver sur les perpendiculaires à ab, élevées de chacun d'eux, ainsi que sur les droites $e'f'$, $e''f''$, seront donc situées aux intersections de ces lignes, aux points g', h', g'', h''. Il en sera de même des autres points *i*, *k*, *l*, *m*, etc. Observons ici que, pour abréger, nous pouvons obtenir les projections de ces points sans le secours des plans que nous venons d'employer. Couchons une des bases du cylindre, par exemple *no*, dans le plan horizontal; prolongeons la droite *gh* jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle de cette base aux points supérieur et inférieur G, G·; prenons les hauteurs *e*G·, *e*G, que nous porterons sur ab, de g en g'', g', et de h en h'', h'. La figure 6 est la projection faite sur la ligne YZ.

Problème 40 (fig. 7). *Étant données les Projections de deux Cylindres droits dont les axes se coupent obliquement, construire la projection horizontale de leur intersection.*

Concevons, dans la projection verticale, les deux cylindres coupés par un nombre quelconque de plans horizontaux; les

projections de ces coupes seront, dans le plan horizontal, des rectangles semblables à ceux de l'exemple précédent, et dont les côtés seront des droites parallèles aux axes dans chacun de ces cylindres, et les points d'intersection de ces lignes seront les points cherchés. Nous pouvons d'abord, sans opération préalable, trouver facilement six points de cette intersection. Par exemple, le point c' est évidemment situé sur $d''e''$, qui est la partie la plus élevée du cylindre; par conséquent la projection horizontale de c' doit être sur de, projection horizontale de $d''e''$, ainsi que sur la perpendiculaire abaissée de c', ou de la droite cf, qui est une des parallèles à l'axe gh. Le point cherché sera donc c, qui se trouve à l'intersection de ces deux lignes. Il en sera de même du point i'. Le point j' se trouve sur la droite $k'l'$, qui est dans un plan horizontal passant par l'axe $d'e'$; cette ligne $k'l'$ aura pour projection horizontale la droite kl, ainsi que son opposée mn; donc, en abaissant de j' une perpendiculaire, les intersections de ces lignes nous donneront les points j, $j^{\cdot}$: il en sera de même pour le point p', dont les projections horizontales seront les points $pp^{\cdot}$. Cherchons maintenant un point quelconque tel que q'; par ce point, menons une droite rs, parallèle à ab; cette ligne rs sera la trace verticale d'un plan coupant le cylindre horizontalement; la projection horizontale de cette coupe sera (ainsi que dans les exemples précédens) un rectangle que nous obtiendrons en prenant, dans la projection verticale, la hauteur du plan coupant au-dessus de l'axe $d'e'$, que nous porterons dans la projection horizontale, sur la base ln, rabattue, de G en T; par ce point, nous mènerons une droite horizontale parallèle à ln, et qui coupera le cercle aux points Q, U; de chacun de ces points, menons des droites parallèles à l'axe de; ces droites seront les côtés du rectangle, qui couperont les perpendiculaires abaissées des points $q'u'$. Les intersections de ces lignes seront les points

cherché ; *q*, *q'*, *u*, *u'*, par lesquels nous ferons passer les courbes, et l'opération sera achevée.

PROBLÈME 41 (fig. 1, pl. 18). *Trouver les intersections d'une Sphère et d'un Cylindre.*

Menons, parallèlement à AB, autant de plans verticaux *cd*, *ef*, etc., que nous le jugerons nécessaire; ces plans couperont en même temps la sphère et le cylindre; les résultats de chacune de ces coupes seront un cercle pour la sphère, et un rectangle pour le cylindre, ainsi que nous l'avons déjà vu. Par chacun des points d'intersection *g*, *h*, *i*, *k*, menons des perpendiculaires indéfinies à AB; prenons les rayons des cercles de chacune des coupes, et du centre vertical *l'*, décrivons des cercles (ou simplement des arcs) qui couperont les perpendiculaires correspondantes aux points cherchés *g'*, *g''*, *h'*, *h''*, etc., par lesquels nous ferons passer les courbes, en observant de ponctuer les parties de ces courbes, qui sont au-delà du diamètre *ik* du cylindre. Cette opération doit être si facile pour nous, qu'il est inutile d'en dire davantage à ce sujet.

PROBLÈME 42 (fig. 2). *Construire les intersections de deux Cônes droits à base circulaire.*

La résolution de ce problème consiste à savoir trouver les projections d'un point donné sur l'une des projections de ces cônes, par les moyens que nous connaissons déjà. Soient AB la commune section des deux plans; les cercles *gdef*, *ghik*, les projections horizontales des deux cônes donnés; et les cônes d*g'*f, h*l'*i, les projections verticales. Si nous supposons ces deux cônes coupés par une suite de plans horizontaux, chacune de ces coupes sera composée de deux cercles qui s'entrecouperont, et chaque

point d'intersection de ces cercles sera un des points de l'intersection des surfaces coniques. Par exemple, la section faite par un plan *m'n'* aura pour projection horizontale deux cercles de diamètres différens, dont l'un aura pour rayon *gm*, et l'autre *lo*. Nous voyons que ces cercles se coupent en deux points *p*, *q*; ces points appartiennent donc également aux deux circonférences; donc les projections verticales de ces points seront sur le plan *m'n'* en *p'q'*. Nous pouvons trouver, de cette manière, autant de points qu'il sera nécessaire. Mais comme il se trouve quelquefois des points qu'il est difficile de déterminer rigoureusement, ainsi, sans beaucoup de tâtonnement, nous allons chercher à déterminer d'une autre façon la position du point *r'*, qui se trouve dans ce cas.

Supposons, pour un moment, ce point trouvé; nous verrons que les deux cercles résultans de la coupe des cônes par le plan *s't'* ne se couperont pas dans la projection horizontale, qu'ils seront seulement tangens en *r*, qui sera le point cherché. Mais admettons maintenant que ce point n'existe pas encore; nous devons voir qu'il nous sera impossible de savoir précisément et sans tâtonnement où nous placerons le plan *s't'*; car, si nous le plaçons plus haut, les deux cercles ne se couperont pas, et par conséquent il n'y aura point d'intersection. Si nous faisons passer ce plan un peu plus bas que *r'*, les intersections des cercles seront si proches l'une de l'autre, qu'il nous sera physiquement impossible de déterminer avec précision la position du point en question; nous serons donc dans la nécessité de recourir à un autre moyen. Nous voyons d'abord que le point que nous cherchons doit être situé dans la projection horizontale sur la droite *gi*, qui passe par les sommets des deux cônes. Nous pouvons considérer cette ligne comme étant la trace d'un plan vertical qui contient 1° le côté du grand cône passant par le sommet *g*, et se terminant à la base en *i*; 2° le côté du petit cône passant par

le sommet *l*, et par la base en *g* : ces deux lignes doivent donc se couper à la surface des deux cônes; par conséquent leur intersection sera le point cherché. Nous n'avons donc qu'à chercher les projections verticales de ces deux lignes, qui seront ig', gl', et qui se couperont en *r'*, point cherché, dont la projection horizontale sera r. Il pourrait arriver (ainsi que nous l'avons déjà vu) que ces deux lignes se coupassent trop obliquement pour pouvoir déterminer avec précision le point de leur intersection; dans ce cas, il faudra que nous le cherchions par un autre moyen que nous connaissons, qui est encore plus direct et plus général que celui que nous venons d'employer. Par *g*, élevons sur *gi* une perpendiculaire que nous ferons égale à la hauteur du cône gg'; menons la droite G*i*, cette ligne sera le côté dont *gi* est la projection horizontale. Par *l*, élevons sur *lg* une semblable perpendiculaire; menons la droite L*g*, cette ligne sera le côté du second cône, et aura la droite *lg* pour projection horizontale. Ces deux côtés de cônes se couperont en R; de ce point, abaissons sur *lg* une perpendiculaire dont l'extrémité r sera la projection horizontale de R ou du point cherché. Par ce point r, élevons sur AB une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle nous porterons la hauteur *r*R de r en *r'*.

Nous ne devons pas négliger l'occasion qui se présente ici de remarquer que nous pouvons faire toute l'opération ci-dessus d'une manière plus abrégée. Commençons par chercher d'abord les deux points *i*, *r*, et ensuite considérons l'intervalle *ir* comme étant un diamètre. De *u*, comme centre avec un rayon *ur*, nous décrirons un cercle dont la circonférence sera la projection horizontale de l'intersection des deux cônes. Il ne nous restera donc plus qu'à chercher la projection verticale de ce cercle par les différens moyens que nous connaissons, ce qui nous donnera l'ellipse i*p'r'q'*.

PROBLÈME 43 (fig. 3). *Étant données les Projections d'une Sphère pénétrée par un Cône scalène ou oblique, construire les projections de l'Intersection de ces corps.*

Ce problème est à peu près le même que le précédent, et cependant le moyen que nous avons employé pour la solution du premier ne serait pas le plus avantageux pour la solution de celui-ci, et nous serait tout-à-fait inutile si le cône était à base irrégulière; ce qui nous prouve de nouveau la nécessité qu'il y a de savoir employer plusieurs moyens pour une même opération. Concevons le cône coupé par un nombre quelconque de plans verticaux, passant tous par le sommet *c* et par la base; les sections faites par ces plans seront autant de triangles qui seront faciles à déterminer, et les sections de la sphère, par ces mêmes plans, seront autant de cercles, aussi faciles à construire; d'où il s'ensuit que l'opération se réduit à trouver les intersections d'une ligne droite et d'un cercle. Afin de ne pas trop surcharger cette figure, nous allons faire cette opération à part, fig. 4. Soient *cd*, *c'*d, les projections de la droite donnée; cette ligne est analogue au côté *cd* du cône de la figure 3. Concevons cette droite comme étant la trace d'un plan vertical coupant la sphère; cette section sera un cercle contenu dans ce plan, et dont le rayon sera *fh* ou *fg*. Si nous rabattons cette coupe dans le plan horizontal, nous aurons le triangle rectangle *dc*C, dont l'hypoténuse sera la droite *d*C, qui coupera le cercle de la section sphérique, ou bien qui entre dans la sphère en I, et en sort en J. De ces deux points, abaissons des perpendiculaires sur *dc*; nous aurons *i*, *j*, pour les projections horizontales des points d'entrée et de sortie de la droite dans la sphère, et dont les projections verticales seront les points *i'*, *j'*. En répétant cette opération sur chacune des autres droites de la figure 3, nous aurons une série de points par lesquels nous ferons passer les courbes des

intersections cherchées. Mais comme cette opération peut être encore abrégée sensiblement, nous allons la répéter d'une autre manière.

Concevons que le plan contenant le triangle et le cercle, que nous venons de coucher dans le plan horizontal, soit redressé, et ait tourné sur le point *c*, en décrivant l'arc *dd*·, alors ce plan se trouvera appliqué dans le plan vertical en d·*c'c*, sans avoir subi aucune altération; par conséquent les points I', J', d'entrée et de sortie se trouveront autant élevés au-dessus de AB, que les projections verticales *i'*, *j'*, ainsi que les centres F', *e'*, des deux cercles. Il suit de ce qui vient d'être dit, que nous aurons beaucoup plus tôt fait cette opération en nous y prenant de cette manière. De *c*, comme centre, avec un rayon *cd*, décrivons l'arc *dd*·; menons la droite *d·c'*, du même point *c*, avec un rayon *cf*; décrivons l'arc *ff*.; de ce dernier point, élevons une perpendiculaire sur laquelle nous porterons la hauteur du rayon de la sphère, de f en F'; de ce dernier point, comme centre, avec un rayon *fi* ou *fj*, nous décrirons un cercle, ou plutôt nous couperons d'un petit arc la droite *d·c'*, aux points I', J'. De chacun de ces points, menons à AB une parallèle qui coupera d*c'* en *i'* et en *j'*, qui seront les points d'intersection cherchés. Comme nous pouvons appliquer de nous-mêmes ce que nous venons de faire à la figure 3, il est inutile d'en dire davantage sur ce sujet.

PROBLÈME 44 (fig. 5). *Construire les Intersections de deux Cônes droits et égaux à base circulaire.*

Nous pourrions résoudre ce problème par la méthode des coupes horizontales que nous avons employée figure 2; mais comme cette méthode serait inutile si ces cônes étaient à bases irrégulières, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il nous convient donc d'employer un moyen plus général; et pour le comprendre plus aisément, nous commencerons par un cas très

simple. Concevons (dans la projection horizontale) un plan vertical CD, coupant les deux cônes selon les axes; les sections seront deux triangles qui auront pour bases les diamètres des cercles des bases, et pour hauteurs les hauteurs de ces mêmes cônes. Mais, comme dans cet exemple les deux cônes sont égaux, les triangles seront égaux; tels sont les triangles verticaux $ce'f$, $gf'd$. Concevons maintenant ce même plan CD, passant successivement par différens points de la base, ou des bases, sans pour cela quitter les sommets; nous verrons que les coupes qui résulteront de toutes ces sections, seront autant de triangles (ce que nous savons déjà), dont les bases diminueront à mesure que le plan s'éloignera des centres des bases, jusqu'à ce qu'il soit devenu tangent aux surfaces de ces cônes : alors comme il n'y aura plus de sections, les résultats ne seront plus que les lignes de tangences *he*, *hf*, ge', ff'. Ainsi nous voyons que les traces horizontales du plan coupant ont changé de places à mesure qu'elles se sont éloignées des centres des bases, tandis que la trace supérieure $c'd'$, n'a pas varié, puisque le plan a passé constamment par les sommets $e'f'$. Nous voyons encore que les circonférences des bases se coupent en *m* et en *i*, qui sont les deux premiers points de l'intersection, qui auront pour projection verticale le seul point m. Cherchons maintenant les projections verticales des différentes sections des cônes par le plan coupant. Comme ces constructions n'ont aucune difficulté pour nous, l'inspection de la figure nous suffira, car nous voyons bien que les triangles horizontaux *nem*, *mfo*, *kep*, *qfr*, etc., auront pour projections verticales, les triangles $ne'p$, $qf'o$, $ke'p$, etc. Ainsi passons de suite à la recherche des points de l'intersection. Nous avons déjà dit que les points *m*, *i*, de la base, qui sont dans un plan perpendiculaire à AB, avaient pour projections verticales le seul point m; remarquons que ce point n'est pas seulement situé à l'intersection des bases, mais qu'il est aussi à l'intersection des côtés *me*, *mf*, et me',

mf'; par conséquent les côtés *pe*, *qf*, *pe'*, *qf'*, qui se coupent, nous donneront les points d'intersection *l*, *l'*. Il en sera de même pour les autres points tels que *t*, *i*, etc. Puisque la courbe de l'intersection se trouve contenue dans un plan qui est perpendiculaire aux deux plans de projections, cette courbe aura pour projections les deux droites i*im*, *i'*m. La fig. 6 est projetée selon la ligne ox, de la fig. 5.

2[e] *Exemple du problème précédent* (fig. 1, pl. 19). Ce problème ne diffère du premier que par l'inégalité des cônes proposés. Concevons une droite indéfinie CD, comme étant la trace horizontale d'un plan vertical, coupant les deux cônes par leurs axes *e*, *f*; concevons encore dans ce plan une droite indéfinie *ef*D, passant par les sommets de ces cônes, la projection verticale de cette ligne sera la droite *e'f'*d; de d, abaissons sur AB, une perpendiculaire qui coupera CD, en D, qui sera le point où la droite passant par les sommets des cônes rencontrera le plan horizontal. C'est par ce point D, et par les sommets *e*, *f*, que doivent passer les plans qui couperont les cônes de la même manière que dans l'exemple précédent, telles sont les traces GD, OD, etc. Nous voyons que cette dernière est la trace d'un plan tangent aux deux surfaces coniques selon les droites O*e*, P*f*. Nous devons voir également que le plan passant par la trace GD, et par la droite *e*D, coupera le grand cône selon les triangles G*e*H, g*e'*h, et le petit selon les triangles I*f*J, i*f'*j. Dans la projection horizontale, nous voyons que les côtés H*e*, I*f*, des deux triangles, se coupent en *k*, qui est la projection horizontale de l'un des points de l'intersection, et la projection verticale de ce même point *k*, sera *k'*, qui se trouve de même à l'intersection des côtés h*e'*, i*f'*. Nous chercherons de la même manière les autres points dont nous aurons besoin. Nous devons facilement voir que les points *l*, *l'*, M, N, appartiennent aussi à l'intersection; nous mènerons donc par ces points la courbe N*lk*M, dans le plan horizontal, et la courbe *l'k'*m, dans le vertical.

3e *Exemple* (fig. 2). Cette figure est en partie analogue à la fig. 5, pl. 18, c'est-à-dire que les deux cônes sont de même hauteur, mais que le plan coupant qui passe par les axes, n'est pas parallèle au plan vertical de projection, et que le cône droit est pénétré par un cône scalène. D'ailleurs, l'opération se fait absolument de la même manière. Si nous voulons éviter la confusion, à mesure que nous aurons trouvé deux ou trois points, nous aurons soin de les lier par un léger trait de crayon; car sans cela, nous aurions souvent de la peine à nous reconnaître.

PROBLÈME 45 (fig. 3). *Construire l'Intersection d'un cylindre pénétré par un cône scalène.*

Concevons une droite cc' parallèle à la génératrice du cylindre, et passant par le sommet du cône; tous les plans verticaux qui passeront par cette ligne et par la base du cône, couperont ce dernier, ainsi que le cylindre, suivant des droites qui seront dans ces plans, car le cône sera coupé en triangles, et le cylindre le sera en rectangles; par conséquent l'intersection de chacune de ces lignes (du cône et du cylindre) nous donnera un des points de l'intersection cherchée. Ainsi, comme dans ce cas la génératrice du cylindre est verticale, la droite $c'c$, menée par le sommet du cône le sera aussi, et aura c, pour projection horizontale. C'est par ce point c, et par la base du cône, que nous ferons passer les plans verticaux dont nous aurons besoin. Par exemple, le plan vertical Dc, coupera le cône par l'axe, selon le triangle dc'e, et le cylindre, selon le rectangle ef'; ces deux figures se couperont en e, e', et $g{\cdot}g'$. Ces intersections étant à la fois à la surface de chacun de ces corps, seront nécessairement des points cherchés, et dont les projections horizontales seront e, g. Il en sera de même pour le plan Hc. Enfin le plan Mc, qui est tangent à la surface du cône selon la droite Mc, mc', ne coupera pas ce corps, mais coupera le cylindre en deux points n, o, ce qui nous donnera

pour cette coupe le rectangle np', et pour points d'intersection n', o', etc. Nous voyons que ce problème ne présente aucune difficulté.

2ᵉ *Exemple du problème précédent* (fig. 4). Concevons le cône, ainsi que le cylindre, coupés l'un et l'autre par un plan vertical, dont C*d* est la trace. Renversons cette coupe dans le plan horizontal, nous aurons pour section du cône le triangle CDE, et pour section du cylindre le cercle *f*GH. Nous voyons dans cette coupe que la droite CD, est tangente au cercle en G. Nous voyons encore qu'un plan qui serait parallèle à l'axe, ou à la génératrice du cylindre, et qui passerait par le sommet D, ou *d*, du cône, et par le point C, serait tangent à la surface de ce cône, ainsi qu'à celle du cylindre. Le point G, qui se trouve également situé sur ces deux surfaces, et dont les projections sont g, g', sera donc un premier point de l'intersection. La droite ED, qui est le côté inférieur du cône, pénètre dans le cercle du cylindre en I et en sort en H; ces deux points appartiennent donc encore à l'intersection, ainsi leurs projections seront i, h, i', h'. Cherchons maintenant un autre point quelconque. Par un point j, pris à volonté sur la droite C*d*, menons parallèlement à la génératrice du cylindre la droite KL; cette ligne sera la trace d'un plan passant par le sommet et par la base du cône. Le triangle K*d*L sera la projection horizontale de la coupe du cône par ce plan. Puisque le plan de ce triangle est parallèle à l'axe du cylindre, les côtés K*d*, L*d*, du triangle entreront en même temps dans le cylindre, et chacun de leur point d'intersection, d'entrée et de sortie, tels que m, m', nn', seront situés sur les génératrices *op*, *qr* de ce même cylindre. Il ne s'agit donc plus que de déterminer ces génératrices. Par j, point pris au milieu de la base du triangle, menons la droite *j*D; cette ligne entrera dans le cercle au point M, et en sortira en N: par ces deux points menons les génératrices *op*, *qr*, qui couperont les côtés du triangle en mm', nn',

qui seront les points cherchés. Il en sera de même de tout autre point. Nous pouvons obtenir les projections verticales de tous ces points, par les divers moyens que nous connaissons, mais particulièrement par celui indiqué au sujet de la fig. 5, pl. 18.

Afin de nous familiariser avec les opérations des projections, nous ne devons pas nous en tenir au petit nombre d'exemples que nous avons donnés, lequel est cependant suffisant pour connaître les principes généraux, et par là nous mettre sur la voie d'acquérir par le travail, les moyens de vaincre les difficultés qui peuvent se présenter dans une infinité de cas particuliers, qu'il nous est impossible d'exposer et de prévoir.

Des Hélices (fig. 1. pl. 20).

Soit A*bcd*, etc., une courbe quelconque tracée sur le plan horizontal. (Dans cet exemple, c'est un cercle, ou la projection horizontale d'un cylindre droit.) Prenons sur cette courbe une série de points tels que A, *b*, *c*, *d*, etc.; par chacun de ces points élevons une verticale, puis concevons une courbe coupant toutes ces verticales en des points a, b', c', d', etc., de manière que les hauteurs de ces points au-dessus du plan horizontal, soient dans un rapport constant avec les arcs A*b*, *bc*, *cd*, etc., rectifiés; par exemple, que A, a, soient sur les plans horizontal et vertical à zéro de hauteur, que *b*, b', soient à 1, *c*, c' à 2, dd' à 3, etc. Cette courbe sera nommée *Hélice*. Telle est, par exemple, celle d'un tire-bouchon, ou d'un fil de fer roulé régulièrement autour d'un cylindre quelconque.

Pour construire cette ligne, nous porterons sur chaque verticale une hauteur que nous aurons déterminée, comme de b, en b', deux de c, en c' trois de d, en d', etc., et par tous ces points, nous ferons passer la courbe cherchée. Il est facile de voir que cette ligne est indépendante du cylindre sur lequel nous venons de la tracer, et que si elle était isolée sa projection horizon-

tale n'en serait pas moins un cercle. On donne à la courbe d'après laquelle une hélice est déterminée le nom de base de l'hélice; et lorsque cette base est un cercle comme dans cet exemple, on l'appelle *hélice à base circulaire*. La droite verticale e*n*, est nommée *axe de l'Hélice*; et la hauteur a*a'*, comprise entre deux intersections consécutives de la courbe avec une verticale, est appelée *pas de l'hélice*. Cette ligne est fréquemment employée dans les vis, les escaliers tournans, etc.

Nous venons de voir que les points A, *b*, *c*, *d*, *e*, etc., étant situés sur la circonférence d'un cercle, se trouvent nécessairement à une même distance du centre. Concevons maintenant, fig. 2, que chacun de ces points se rapproche du centre dans un rapport constant, tel, par exemple, 1, 2, 3, 4, 5, etc. La courbe que nous ferons passer par tous ces points, perdra son nom d'hélice, et s'appellera *spiral*e (toutefois étant considérée dans un même plan). Si nous supposons, comme dans l'exemple précédent, que ces points soient élevés au-dessus du plan horizontal dans un rapport aussi, constant, ou bien que nous supposions cette spirale tracée sur la surface d'un cône, alors sa projection verticale se nommera *limace*. Nous pouvons encore tracer cette dernière ligne sur la surface d'une sphère (fig. 3). Nous voyons dans la projection horizontale de cette dernière figure, deux courbes qui paraissent en sens contraire l'une de l'autre; la première qui est pleine appartient à l'hémisphère supérieur, et celle qui est ponctuée, à l'hémisphère inférieur. Ces deux courbes ne font qu'une seule et même ligne, ainsi que nous le voyons dans la projection verticale. Lorsque nous aurons tracé cette courbe dans la projection horizontale, nous en chercherons la projection verticale par les moyens que nous connaissons, c'est-à-dire, en coupant la sphère par des plans verticaux parallèles au plan vertical de projection, tels sont les plans *ik*, AB, *lf*, etc.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE TROISIÈME.

DE LA LUMIÈRE, DES OMBRES, ET DES COULEURS.

De la Propagation de la Lumière.

C'est par le moyen de la lumière que nous apercevons les différens objets qui nous environnent. Nous n'avons aucune connaissance certaine sur la nature de cette admirable substance, qui paraît ne réunir qu'en partie les qualités inhérentes à la matière, ce qui l'a vraisemblablement fait regarder par quelques philosophes, comme étant un agent intermédiaire entre la matière et l'esprit. En effet, si nous considérons la lumière comme douée de mouvement et agissant sur nos sens, nous conclurons sans hésiter qu'elle est matière. Mais ensuite si nous faisons attention que cette même lumière est impondérable, qu'elle remplit tout l'espace dans lequel les astres se meuvent, et qu'elle n'oppose aucune résistance à leurs mouvemens (ce qui est opposé aux qualités de la matière), alors nous serons tentés de croire qu'elle n'est pas matière, et par conséquent nous ne saurons quel rang lui assigner dans l'ordre des êtres, les plus grands des physiciens qui l'ont étudiée n'étant d'ailleurs nullement d'accord entre eux. Donc, nous n'avons aucune connaissance certaine sur sa nature; nous ne connaissons qu'une partie de ses principaux effets, et nous ne nous occuperons dans cet Ouvrage que de ceux qui ont un rapport direct à l'objet que nous nous proposons. Nous considérerons donc sous un seul et même point de vue, la lumière du soleil, celle de la lune, celle d'une lampe, etc.

Chacun de nous peut savoir par sa propre expérience qu'un point lumineux ou étincelle *a* (fig. 1, pl. 1) peut être vu de tous côtés dans le même instant; il faut donc qu'il émane de ce point un nombre indéfini de rayons lumineux qui vont en divergeant dans tous les sens, et s'étendent indéfiniment en ligne droite dans l'espace, lorsqu'ils ne rencontrent pas d'obstacles. Nous pouvons donc considérer ce point comme étant le centre d'une sphère lumineuse, et cette même sphère comme un assemblage de pyramides ou de cônes dont les sommets se réunissent au centre, et dont les côtés s'étendent indéfiniment. Ainsi un œil *b*, placé à une distance quelconque d'un point lumineux *a*, reçoit une certaine quantité de rayons, que nous pouvons considérer comme formant un cône dont la base est la prunelle de l'œil, et le sommet le point lumineux *a*. Le rayon *ab* qui passe par le centre de la prunelle et par le milieu du cône, sera l'axe de ce même cône. Il est évident que si la prunelle au lieu d'être ronde était triangulaire ou carrée, la somme des rayons qu'elle recevrait serait une pyramide dont l'axe serait encore le même rayon *ab*.

Si, à une distance quelconque d'un point lumineux, telle que 1*a*, nous plaçons un plan carré dont *cd*, est le côté, ce plan interceptera une certaine quantité de rayons dont la somme se mesurera par l'angle *cad*; cette somme de rayons formera une pyramide quadrangulaire dont la base sera le plan *cd*, et le sommet, le point *a*. La projection verticale de cette pyramide sera $c'D'a'$. Concevons maintenant les côtés *ac*, *ad*, prolongés indéfiniment; nous aurons toujours l'idée d'une pyramide lumineuse *eaf*, dont l'axe sera *a*3. Prenons sur cet axe les points 2, 3, etc., éloignés les uns des autres d'une distance égale à 1*a*, ou, ce qui est la même chose, divisons cet axe en parties égales, et menons par chacun des points de division un plan qui soit perpendiculaire à l'axe, et qui coupe les côtés de la pyramide

en *gh*, ef, etc. Le côté *gh*, passant par le point 2, sera double du premier *cd*, et sera par conséquent le côté $g'h'$ d'un carré g'H', quadruple en surface du premier c'D'. Ce carré quadruple ne recevant que la même somme de lumière qui éclairait le carré *cd*, ou c'D' (puisque l'angle *gah*, égale l'angle *cad*), sera donc éclairé quatre fois moins, ou, ce qui est la même chose, l'intensité de la lumière sur ce plan ne sera que le quart de ce qu'elle était sur le premier. Si par le point 3, nous plaçons un plan parallèlement aux deux premiers, le côté *ef*, de ce plan aura trois fois la longueur de *cd*; par conséquent son carré eF', sera en surface neuf fois plus grand, ou contiendra neuf carrés comme c'D'. Il sera donc éclairé neuf fois moins que ce dernier, ou ne recevra qu'un neuvième de la lumière donnée, et ainsi de suite. Si nous considérons l'intensité de la lumière du premier carré comme 1, celle du second sera $\frac{1}{4}$, celle du troisième $\frac{1}{9}$, celle du quarième $\frac{1}{16}$, etc. Nous voyons par là que l'intensité de la lumière diminuera en raison de la distance de son point de départ *a*, dans le rapport de 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, etc. Ce qu'on exprime ordinairement ainsi : *L'intensité de la lumière, est en raison inverse du carré de la distance.*

Il suit de ce qu'il vient d'être dit, que si nous considérons la lumière d'une manière inverse, c'est-à-dire, se répandant en rayons convergens, comme de *b*, en *a*, de e, en *a*, de f, en *a*, etc., son intensité croîtra en raison du carré de la distance ; donc si nous considérons la prunelle de l'œil comme étant un plan, nous en conclurons que la lumière qu'il recevra doit s'affaiblir ou croître dans le même rapport à mesure qu'il s'éloignera ou s'approchera du corps lumineux. Donc, *l'intensité de la lumière croît ou décroît en raison du carré des distances. Voyez* la fig. 2, projetée sur la ligne *xy*, et la fig. 3 dans laquelle ces plans sont séparés.

Il nous reste encore à voir si une pyramide lumineuse étant

coupée par un plan perpendiculairement à son axe, ce plan recevra une plus grande somme de lumière que lorsqu'il coupe cette même pyramide obliquement à son axe (fig. 4).

Soit *a*, le point lumineux, *bac*, la pyramide lumineuse formée par les rayons émanans du point *a*, et coupée perpendiculairement à son axe *ad*, par un plan *ef*. Ce plan recevra une somme de rayons mesurée par l'angle *eaf*. Supposons maintenant que ce plan ait tourné au point *g*, comme autour d'un axe, de manière que ses extrémités *ef*, soient en *e'f'*; si nous menons le rayon *af'*, nous verrons que le plan ne recevra plus que la somme de lumière mesurée par l'angle *e'af'*. Or cet angle étant plus petit que l'angle *eaf*, le plan recevra donc moins de lumière qu'il n'en recevait dans sa première position, et par conséquent sera moins éclairé. Concevons encore que ce plan ait tourné jusqu'à être dans la direction de l'axe comme en *e''f''*; alors l'angle *e'af'*, sera réduit à zéro. Dans cette dernière position, le plan *e''f''*, ne recevra donc plus de lumière, et sera par conséquent dans l'ombre. Donc, *lorsqu'une surface reçoit la lumière perpendiculairement à son plan, cette surface se trouvera éclairée à son maximum d'intensité, et cette intensité diminue en raison de l'obliquité de cette surface à l'égard de cette même lumière.*

C'est par cette raison que nous distinguons les différentes parties de la surface d'un objet, ainsi que les différens objets entre eux, abstraction faite des couleurs. C'est aussi sur cette proposition qu'est fondée toute la science du *clair-obscur*.

Lorsqu'un corps lumineux a une certaine étendue, nous devons considérer sa surface comme contenant un nombre indéfini de points radieux analogues au point *a*, et lançant chacun des rayons divergens qui se croisent dans tous les sens, tel que le corps lumineux sphérique (fig. 5), sur la circonférence duquel nous ne considérerons que huit points afin d'éviter la confusion,

ce qui suffit pour nous donner une idée des autres points de sa surface, ainsi que de l'immense quantité de rayons qui en émanent sans jamais se confondre, ainsi que nous allons le voir par l'expérience suivante (fig. 1, pl. 2). Soient *a*, *b*, deux tuyaux inclinés entre eux dans un même plan, et garnis chacun à son extrémité d'un verre coloré, le premier, par exemple, en rouge et le second en bleu; ces tuyaux seront adaptés au volet d'une chambre bien fermée, et comme ils sont inclinés l'un à l'autre dans un même plan, les rayons solaires qui passeront à travers se croiseront en un point *c*. Si nous bouchons le tube *a*, le tube *b*, portera son image sur le mur opposé en *b'*; si nous bouchons le tube *b*, le tube *a*, portera son image en *a*. Laissons maintenant ces deux tubes ouverts, alors les deux faisceaux de rayons lumineux se couperont, ou se pénétreront en *c*, sans se confondre et porteront chacun leur image à la même place et d'une couleur aussi pure qu'elle était avant le croisement des rayons lumineux; et comme il en serait de même si nous eussions employé un plus grand nombre de verres diversement colorés, nous pouvons en conclure que *les rayons de la lumière se croisent dans tous les sens, sans éprouver aucun obstacle et sans se confondre.*

Des Ombres (fig. 2).

Nous avons déjà dit que les rayons qui émanent d'un point radieux s'étendent en ligne droite et indéfiniment dans l'espace, lorsqu'ils ne rencontrent pas d'obstacle. Soit donc *a*, un point lumineux lançant des rayons divergens dans tous les sens. Si un corps opaque (terminé par des surfaces planes, tel que le cube 1. ou un corps terminé par une surface courbe comme la sphère 2.) se trouve exposé à ces rayons, les parties de ce corps qui en seront frappées seront plus ou moins éclairées, et les parties qui ne recevront aucun rayon seront privées de lu-

mière et seront ce qu'on appelle dans l'*ombre* : ainsi, dans le cube 1, la face *bc* sera seule éclairée, et les cinq autres seront dans l'ombre. De même dans la sphère 2, les rayons *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*, etc., tangens à la sphère détermineront un segment *dhi*, qui sera éclairé, et l'autre segment *dhj*, sera dans l'ombre. Ces parties ombrées se nomment *ombres des corps*, pour les distinguer d'une autre sorte d'ombre dont nous allons parler. Les rayons qui rasent le plan carré *bc*, forment une pyramide indéfinie qui se trouve tronquée par ce même plan *bc*; la partie *abc*, sera une pyramide lumineuse formée par les rayons qui n'ont pas été interceptés, et la portion indéfinie *bb'*, *cc'*, etc., se nomme *ombre portée* par les corps. Ainsi, l'ombre portée par un corps doit être considérée comme étant un solide dont la forme dépend à la fois de celle du corps lumineux et de celle du corps éclairé, ainsi que de leurs positions respectives, ce qu'il est facile de voir puisque la portion de rayons interceptée par le carré *bc*, est une pyramide quadrangulaire, et que celle interceptée par la sphère ou le cercle *defgh*, sera un cône.

L'ombre d'un corps ou l'ombre portée par un corps paraît d'autant plus foncée que l'intensité de la lumière qui éclaire ce corps est plus grande à cause du contraste seulement. Si nous supposons cette pyramide et ce cône coupé par un plan *kl*, *mn*, perpendiculairement à leur axe, l'ombre portée par chacun de ces corps se projettera sur ces plans, et donnera pour la pyramide sur le plan *kl*, un carré, et pour le cône, l'ombre portée par la sphère sur le plan *mn*, un cercle. Mais si le plan coupant n'était pas perpendiculaire à l'axe, la figure formée par l'ombre portée sur ce plan changerait; elle pourrait être un rectangle ou une losange pour la pyramide, et une ellipse pour le cône.

Le corps lumineux peut avoir trois dimensions différentes, par rapport au corps opaque qu'il éclaire, il sera plus petit,

égal ou plus grand que ce même corps. 1°. S'il est plus petit, nous pouvons comparer sa lumière à celle d'une bougie, d'une lampe, etc.; dans ce cas, la partie éclairée du corps opaque sera plus petite que la partie ombrée, comme dans l'exemple précédent. 2°. Si le corps lumineux 1 (fig. 1, pl. 3) est égal au corps opaque 2, la partie éclairée de ce corps sera égale à la partie ombrée; car tous les points de la surface du corps lumineux peuvent être considérés comme étant les centres d'où partent une infinité de rayons divergens dans tous les sens. Il est clair que de tous les rayons il n'y en aura qu'une partie d'interceptée par le corps opaque, tels sont les rayons lancés par les points a, b, c, d, e, etc., qui sont situés sur l'hémisphère qui regarde le corps 2, et dont les limites seront les rayons partans de tous les points du grand cercle représenté par la droite $a1e$. Ces rayons seront tous tangens à la sphère opaque aux points a', 2, e', etc., ce qui déterminera deux segmens égaux dont l'un $a'c'e'$, sera éclairé et l'autre $a'fe'$, sera ombré. La partie de l'espace $a'a''e''e'$, privée de lumière par l'interposition du corps 2, ou l'ombre portée par ce corps, sera cylindrique. Cette ombre étant coupée par un plan gh, perpendiculairement à son axe, sera un cercle dont le diamètre sera $a''e''$. Il est facile de voir que si le corps opaque était terminé par des surfaces planes rectilignes, l'ombre portée serait un prisme.

Nous venons de voir que l'ombre d'une sphère reçue sur un plan était un cercle de même diamètre que celui de la sphère. Mais comme il se trouve des points lumineux, tels que b, c, d, qui sont interceptés par la sphère aux points de tangence b', c', d', l'ombre de chacun de ces points sera portée sur le plan gh, aux points b'', c'', d'', etc. Il nous semblerait d'abord qu'il doit y avoir sur ce plan une seconde ombre qui, étant ajoutée à la première, l'augmenterait considérablement; mais, en examinant la chose avec un peu d'attention, nous verrons que ces deux ombres

21

sont très différentes : puisqu'il part de chacun des points de la surface du corps lumineux un nombre indéfini de rayons, il s'en trouvera parmi ceux qui partent des points *b*, *d*, tels que bb^3, dd^3, etc., qui ne seront pas interceptés par le corps opaque, et qui se projetteront sur le plan dans la seconde ombre en b^3, d^3, etc., et qui par conséquent, en diminueront l'intensité. Il en sera de même de tous les autres points intermédiaires que nous n'avons pas marqués pour éviter la confusion, mais que nous pouvons imaginer facilement. Il nous suffit seulement d'être prévenus que cette seconde ombre, à mesure qu'elle s'éloigne de la première, reçoit une plus grande somme de rayons lumineux, et par conséquent va toujours en diminuant d'intensité ou en s'éclaircissant, ce qui la distingue de l'ombre proprement dite qui est beaucoup plus foncée. Cette seconde ombre se nomme *pénombre*.

Enfin, lorsque le corps lumineux 1, est plus grand que le corps éclairé 3 (sa lumière peut être comparée à celle d'un incendie par rapport aux objets voisins), nous voyons que les rayons partans des points *a*, *e*, sont tangens au corps 3, et par là déterminent les parties de ce corps qui sont éclairées ou ombrées, ainsi que l'ombre portée sur le plan *ij*; et comme la droite *kl*, qui est la limite de la partie éclairée et ombrée, ne passe pas par le centre 3, il s'ensuit que les deux segmens ne seront pas égaux, que la partie éclairée *klm* sera plus grande que la partie *knl*, qui est dans l'ombre. Nous verrons de même que le diamètre *k'l'*, du cercle de l'ombre portée est plus petit que celui du corps 3. La pénombre *qr*, est analogue à la précédente.

De tout ce qui vient d'être dit, nous pouvons conclure que : *l'ombre portée par un corps quelconque, diminue toujours d'intensité depuis les premières limites de la pénombre jusqu'aux dernières.*

Nous avons vu qu'une surface exposée à la lumière était éclairée en raison de sa distance à cette même lumière ; nous avons vu aussi qu'une surface était plus ou moins éclairée en raison de son degré d'inclinaison aux rayons lumineux; voyons maintenant si une même surface est également éclairée dans toutes ses parties, sa distance à la lumière étant donnée. Soit *a* (fig. 2) le point lumineux ou le sommet d'un cône de lumière *bac* ; la droite *bc*, est la projection horizontale d'un plan circulaire que nous considérerons comme étant la base du cône formé par les rayons lumineux. Il est évident (d'après ce que nous avons dit) que le centre *d*, étant plus près du point *a* que n'en sont les parties *b*, *c*, *e*, *f*, etc., ce centre recevra plus de lumière que ces mêmes parties, et par conséquent sera plus éclairé. Il est facile de voir que les différentes parties de ce cercle seront moins éclairées que le centre à mesure qu'elles s'éloigneront de ce même centre, puisqu'elles s'éloigneront en même temps du point lumineux *a*. Donc : *les parties d'une même surface qui seront plus près du point lumineux, seront plus éclairées que celles qui en seront plus éloignées.*

Nous devons encore faire attention à l'intensité plus ou moins grande des différentes lumières qui éclairent les corps ; par exemple, les plans circulaires *ab*, *cd* (fig. 3), étant à égale distance des points lumineux 1, 2, le premier de ces points n'ayant qu'un degré d'intensité et le second en ayant deux, ce dernier devra être plus éclairé que l'autre, quoique étant tous deux à une même distance de la lumière.

Des Rayons lumineux considérés comme parallèles entre eux (fig. 1, pl. 4).

Soient *a* un point lumineux, et *bc* un plan qui se trouvera éclairé comme les précédens. Concevons maintenant le point *a* reculé du plan *cd*, en *a'*; nous verrons que les côtés du triangle

a'bc, approcheront davantage des parallèles *db*, *ec*, que ne le font les côtés *ab*, *ac*, du triangle *abc*; or, plus le point lumineux sera éloigné de *bc*, plus aussi les côtés du triangle se rapprocheront des parallèles; donc; lorsque ce point sera infiniment éloigné, les côtés du triangle se confondront avec les parallèles *db*, *ec*; alors tous les rayons qui émaneront de *a'*, seront parallèles entre eux et tomberont sur tous les points de la surface du plan *bc*, sous des angles égaux, et, par conséquent, éclaireront ce plan également dans toutes ses parties : ce que nous pouvons rapporter au cas où la lumière est égale en volume au corps éclairé. Ce cas a cela de commode dans la projection des ombres, qu'on n'a pas besoin de connaître la distance de la lumière au corps éclairé, ce que nous verrons lorsque nous traiterons cet article. Nous pouvons facilement nous faire une idée de cette dernière position de la lumière, lorsque nous regardons une étoile dont les rayons forment avec la prunelle de notre œil un cône dont la base est de quelques lignes, et dont les côtés ont plusieurs milliards de lieues de longueur. Si nous observons seulement la distance du soleil à la terre, qui est beaucoup moindre que celle d'une étoile, puisqu'elle n'est que d'environ quarante millions de lieues, nous pourrons bien considérer ses rayons comme étant parallèles entre eux sans erreur sensible, ainsi que les rayons de la lune qui sont à une distance beaucoup plus petite. Maintenant si nous comparons le diamètre de la terre qui est d'environ trois mille lieues avec sa distance au soleil, nous aurons le rapport de trois mille à quarante millions; ce qui doit nous faire voir que relativement à cette distance, tous les corps qui se trouvent sur la surface du côté de la terre qui regarde le soleil sont sensiblement pour nous également éclairés. D'où il suit que si deux plans égaux sont éloignés l'un de l'autre de quelques lieues dans la direction du soleil, le carré de leur distance à cet astre ne diminuera pas sensiblement pour nous, l'intensité de clarté de chacun de ces plans; par

conséquent ces deux plans doivent nous paraître également éclairés.

De la Lumière réfléchie (fig. 2).

L'expérience nous a appris que lorsqu'un rayon lumineux *ab*, rencontre une surface opaque et polie, telle que celle d'un miroir, de l'eau, etc., que nous représenterons par la droite *cd*, ce rayon, de même que tous les corps élastiques, se réfléchit suivant la droite *be*, de manière que l'angle *ebd*, que ce rayon réfléchi fait avec le plan *cd*, est égal à l'angle *abc*, formé par le rayon direct *ab*, avec ce même plan. Le rayon *ab*, se nomme dans ce cas, *rayon incident*, et le rayon *be*, se nomme *rayon réfléchi;* de même l'angle *abc*, se nomme *angle d'incidence*, et on appelle l'angle *ebd angle de réflexion;* d'où il suit *que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.* Le point de contact *b* se nomme *point d'incidence*, ou de *réflexion*.

Il nous est facile de voir qu'il en est de même des rayons *af*, *ag*, etc.; ce dernier rayon tombant perpendiculairement sur *cd*, se réfléchit sur lui-même, et les deux angles *agc*, *agd* étant droits, sont par conséquent égaux. Un spectateur dont l'œil serait en *e*, verrait donc le rayon réfléchi selon la direction *eb*, et aurait le sentiment du point lumineux *a*, en a', de la même manière que si ce point était placé derrière le miroir, et à la même distance qu'il est au-dessus. Il en sera de même de l'œil placé en *h*, et si nous prolongeons les rayons réfléchis *eb*, *hf*, leur point de rencontre se trouve exactement en a', image du point lumineux *a*; si nous prolongeons le rayon incident *ab*, ou *af*, il rencontre le prolongement de la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le plan *cd*, en un point e', ou h', qui est autant au-dessous de ce plan, que l'œil *e*, ou *h*, est au-dessus de ce même plan, ce qui nous donne le moyen de résoudre le problème suivant.

Problème premier. *Un point a étant donné hors d'un plan poli, ainsi que la position de l'œil d'un spectateur, déterminer sur ce plan le point d'incidence où se fera la réflexion du point donné.*

De l'œil *e*, abaissons sur *cd* une perpendiculaire indéfinie sur laquelle nous porterons la hauteur *ie*, de *i* en *e'*; de ce dernier point menons la droite *e'a*, qui coupera le plan *cd*, en *b*, qui sera le point cherché, par lequel et par *e*, nous mènerons le rayon réfléchi *be*. Remarquons que si nous abaissons une perpendiculaire du point donné *a*, sur laquelle nous porterons *ga*, de *g*, en *a'*, de ce point nous mènerons à l'œil *e*, la droite *a'e*, qui nous donnera également le point *b*. De ce que nous venons de dire, il est facile d'entrevoir la simplicité des moyens qu'il faudrait employer pour trouver sur la surface d'un miroir ou sur celle de l'eau, etc., les réflexions des différens objets tels, par exemple, que les droites *ab*, *cb*, *de*, fig. 3 : soit *fg*, le niveau de l'eau ; il est évident que le point *b*, qui est sur ce niveau, est lui-même sa réflexion ; il ne s'agit donc plus que de trouver celle de *a* : abaissons de ce point une perpendiculaire sur *fg*, et du point d'intersection *h*, faisons *ha'* égale à *ha* ; *a'* sera l'image ou la réflexion ; de *a* menons la droite *a'b*, et nous aurons la réflexion cherchée de *ab*. Il en sera de même des droites *cb*, *de*, etc. Nous verrons d'autres exemples analogues par la suite.

C'est par la réflexion de la lumière que nous voyons les différens objets qui nous environnent, car, sans elle, nous serions dans des ténèbres absolues, nous nous heurterions contre les corps qui se trouveraient sur notre passage, nos yeux ne seraient affectés que par les rayons qui émanent directement du corps lumineux, et qui par conséquent en seraient blessés. Nous pouvons nous convaincre de cette vérité par l'expérience suivante. Soient *ab*, *cd* (fig. 4) deux tuyaux ouverts par leurs extrémités, noircis dans l'intérieur, et se coupant à angles droits. Si nous mettons une

lumière en *a*, et que nous regardions par l'ouverture *b*, nous verrons cette lumière; mais quand nous regarderons par l'ouverture *c*, nous ne verrons absolument rien de la colonne lumineuse *ab*, ce qui prouve qu'on ne peut pas voir la lumière, et qu'elle ne se propage qu'en ligne droite. Ceci ne doit s'entendre que des rayons qui émanent du corps lumineux, car pour ce corps on le voit toujours. Les images ou réflexions des objets sont toujours plus faibles que les objets originaux, parce qu'il est impossible d'avoir une surface parfaitement polie, ce qui fait qu'il y a toujours perte d'une partie des rayons qui sont réfléchis dans d'autres sens. Dans l'eau les réflexions sont encore plus faibles que dans les miroirs, parce que l'eau étant transparente laisse passer une grande partie des rayons, et que, par conséquent, il n'y en a qu'une certaine quantité de réfléchis.

Lorsqu'un corps est éclairé, il agit sur nos yeux de la même manière que la lumière elle-même, seulement à un plus faible degré. Nous le voyons plus ou moins brillant, selon qu'il réfléchit plus ou moins de lumière, car tous les corps ne la réfléchissent pas également; cela dépend non-seulement du poli de leur surface plus ou moins parfait, de leurs inclinaisons aux rayons lumineux, mais encore de leurs couleurs. Par exemple, de deux surfaces semblables et égales non polies, mais dont l'une sera blanche et l'autre noire, la première réfléchira à notre œil une certaine quantité de lumière, tandis que la seconde n'en réfléchira point, ou que très peu. Une surface brute réfléchira moins de lumière qu'une autre qui serait mieux polie, parce que la première présente dans ses aspérités de petites facettes inclinées dans différens sens, et qui renvoient la lumière dans des directions qui ne sont pas celles de l'œil.

Puisque les corps opaques réfléchissent la lumière à la manière des corps lumineux, ils font donc l'office de ces derniers, et par conséquent, ils peuvent être considérés comme tels jusqu'à un certain

point; ces corps doivent donc s'éclairer mutuellement. Un corps quelconque peut donc être éclairé à la fois de deux manières différentes : savoir, directement par un corps lumineux, et indirectement par la lumière réfléchie d'un ou de plusieurs autres corps, plus ou moins proches de lui. La lumière réfléchie suit absolument les mêmes lois que la lumière directe; elle ne diffère de celle-ci que par une intensité plus faible. C'est le phénomène qui en résulte qu'on appelle généralement *reflet*.

Nous avons jusqu'ici considéré la lumière comme se mouvant dans un milieu libre, c'est-à-dire, dégagé de toute particule de matière, tel, par exemple, que le vide, où la lumière ne trouvant aucun corps qui puisse la réfléchir, traverse sans éclairer; c'est en partie ce qui arrive sur les hautes montagnes où l'air se trouve beaucoup plus rare et moins chargé de vapeurs qu'il ne l'est dans les basses régions de l'atmosphère : on voit alors le ciel presque noir, et il le paraîtrait même tout-à-fait si l'on était plus élevé, puisque l'immensité de l'espace ne serait nullement éclairée. Il n'en est pas ainsi dans les basses régions que nous habitons, où l'air est plus ou moins chargé de parties hétérogènes, telles que l'eau réduite en vapeurs, la poussière, la fumée, et autres émanations de la terre, dont les molécules présentent à la lumière une infinité de petites surfaces qui la réfléchissent dans tous les sens, et qui s'éclairant mutuellement, font que la masse de l'air paraît un grand foyer de lumière modérée qui envoie dans tous les sens un nombre infini de rayons qui éclairent les corps qui sont sur la surface de la terre, même lorsque le soleil nous est caché par des nuages ou par du brouillard.

Les molécules dont l'air est plus ou moins chargé sont en partie cause de l'affaiblissement de la lumière qui vient des différens corps qui sont plus ou moins éloignés de nos yeux. Ces molécules ou vapeurs, qui sont blanches et plus ou moins transparentes, font que l'air est plus ou moins opaque, et que le volume de son

épaisseur, qui s'étend à plusieurs lieues, fait que le ciel qui est noir (et qui doit l'être) nous paraît bleu. Nous pouvons, jusqu'à un certain point, produire cet effet par une expérience très simple. Nous n'avons qu'à répandre un peu d'eau plus ou moins laiteuse ou bien appliquer un morceau de ce verre blanc et opaque nommé *Girasol* sur une surface noire, celle-ci nous paraîtra bleue. Si nous faisons la même expérience sur une surface blanche, la teinte de cette surface ne sera nullement altérée, et se confondra avec l'opacité laiteuse de l'eau ou du verre. C'est en effet ce que nous voyons fréquemment dans la nature, car les montagnes couvertes de neige sont encore visibles à cinquante lieues, et nous paraissent toujours blanches, tandis que ces mêmes montagnes (comme les Vosges) lorsqu'elles sont dépouillées de leur neige et deviennent par conséquent plus ou moins noires, ne sont plus visibles à cette distance. Mais, en nous rapprochant, elles nous paraissent plus ou moins bleues, et diffèrent très peu de la couleur du ciel. D'où nous pouvons conclure que *plus une surface réfléchira de lumière* (*ou sera claire*), *moins sa couleur sera altérée par son éloignement de notre œil*, et réciproquement. Or le blanc, considéré comme couleur, réfléchit plus de lumière que toute autre couleur, et le noir, considéré de même, est de toutes les couleurs celle qui en réfléchit le moins. Donc plus la couleur d'un corps approche du blanc, moins elle est altérée par l'éloignement, et plus elle approchera du noir, comme le vert, le bleu, le brun, etc., plus elle est altérée par le même éloignement.

Si, vers le soir d'un beau jour, immédiatement après le coucher du soleil, nous posons un corps opaque blanc, sur une surface horizontale aussi blanche, tel, par exemple, qu'un cône (fig. 1, pl. 5), qu'ensuite nous placions à peu de distance de ce corps une lumière, une bougie, une lampe, etc., A*a*; la partie ombrée *bcdh*, de ce corps, ainsi que l'ombre portée *bgh*, nous

paraîtront d'un bleu d'azur très foncé, parce que ces parties ne reçoivent aucun rayon direct du point lumineux A, et ne sont éclairées que par les rayons envoyés de la voûte azurée du ciel. Mais cette lumière bleue est si faible par rapport à la lumière orangée de la bougie A, qu'elle n'est nullement sensible sur les parties qui sont éclairées directement par cette dernière; c'est pourquoi ces mêmes parties, comme *bde*, ainsi que les parties du plan horizontal qui ne reçoivent point d'ombre, nous paraîtront jaune-orangé. Nous pouvons encore remarquer cet effet l'hiver lorsque la terre est couverte de neige, et que le ciel est pur; alors les parties des corps qui sont éclairées par le soleil couchant paraissent orangées, et les parties ombrées, ainsi que les ombres portées paraissent d'un beau bleu d'azur.

Cette lumière bleue (ainsi que nous l'avons déjà dit) n'est sensible que sur les parties des corps qui sont privées de la lumière directe du soleil, ainsi que sur les corps qui réfléchissent peu de lumière à cause de leurs couleurs sombres, et surtout lorsqu'ils sont très éloignés de nous, puisque le blanc, vu à cinquante lieues nous paraît toujours blanc et non pas bleu, ce qui devrait arriver si les molécules de l'air étaient bleues, ainsi que l'ont avancé plusieurs célèbres physiciens. La lumière réfléchie par le ciel, se nomme *lumière atmosphérique*, et n'a aucune couleur, ainsi que nous pouvons le voir lorsque le temps est couvert ou qu'il fait du brouillard; elle a seulement moins d'intensité que lorsqu'il fait beau.

Les limites des ombres portées par les corps sont plus ou moins déterminées; cela dépend de l'intensité ou concentration de la lumière. Ainsi, les ombres portées par les corps qui sont éclairés par la lumière atmosphérique sont terminées d'une manière beaucoup plus vague que celles portées par les mêmes corps lorsqu'ils sont éclairés par le soleil ou par une lampe. La lumière atmosphérique est beaucoup plus forte que celle qui est réfléchie par les

corps opaques et non polis; les effets de celles-ci ne s'étendent qu'à de médiocres distances. C'est sur la dégradation de la lumière et de la couleur des corps qu'est fondée la science nommée *Perspective aérienne*, dont les principes dépendent non-seulement de la distance plus ou moins grande des objets à notre œil, mais encore de la densité plus ou moins grande de l'air atmosphérique.

Nous avons déjà dit qu'un corps pouvait être éclairé directement ou indirectement par réflexion ou par reflet, et que dans ces deux cas, la lumière suivait la même loi. Nous allons tâcher de rendre cette vérité sensible par un exemple, fig. 4, pl. 4. Soit le plan horizontal ou le terrain *ab*, frappé par les rayons solaires *cd*, *ef*, *gh*, etc.; toute la partie de ce plan qui recevra directement des rayons sera également éclairée. La surface de la muraille ou plan vertical *ai*, étant opposée à la direction des rayons lumineux, et par conséquent n'en recevant pas, sera entièrement dans l'ombre, ainsi que la partie *ad*, du terrain qui est également privée de lumière par l'interposition de la muraille *ai*. Cette muraille, ainsi que son ombre portée, devraient donc nous paraître entièrement noires. Mais chaque point du terrain qui est éclairé comme *h*, *l*, *m*, etc., faisant l'office d'un point lumineux, chacun de ces points, tel que *h*, enverra une somme plus ou moins grande de lumière au plan vertical *ai*, tel que *hs*; de plus, les rayons envoyés dans tous les sens par l'atmosphère, comme *rn*, *go*, venant frapper ce même plan, ainsi que son ombre portée *ad*, ces deux parties se trouveront éclairées de la même manière que celles qui le sont directement par le soleil, mais plus faiblement. Les points de la partie éclairée du terrain qui sont les plus proches de nous, tel que *h*, enverront à notre œil une plus grande somme de lumière que ceux qui en sont plus éloignés, tels que *l*, *m*, etc., par conséquent les parties de ce plan qui sont les plus proches de nous doivent donc nous paraître plus claires que celles qui en sont plus éloignées. Nous devons faire le même raisonne-

ment, à l'égard de la surface ombrée *ai*, ainsi que de toutes les autres surfaces qui sont plus ou moins éclairées; donc les ombres qui sont sur le devant d'un tableau comme étant plus proches de nous doivent être plus claires que celles qui sont sur des plans plus reculés, ce qui est contraire à l'opinion commune, qui est que les ombres doivent toujours s'affaiblir depuis la base du tableau jusqu'à l'horizon. D'après ce raisonnement, il s'ensuivrait que les ombres diminuant toujours d'intensité seraient blanches à l'horizon, et que les surfaces éclairées, par la même raison, seraient noires. Nous voyons qu'il n'en est pas ainsi dans la nature. Cette dégradation a donc ses limites, c'est ce que nous allons tâcher d'éclaircir.

Nous avons déjà dit qu'un certain volume d'air était plus ou moins opaque ou laiteux, et lorsqu'il se trouve interposé entre les objets et notre œil, nous devons voir ces mêmes objets altérés dans leurs parties plus ou moins lumineuses, mais principalement dans leurs couleurs; et comme le noir peut, jusqu'à un certain point, être comparé aux couleurs (ainsi que nous le verrons par la suite), et que les ombres étant une modification du noir, ou une soustraction partielle de lumière, doivent être plus affaiblies par un même volume d'air que les parties blanches et éclairées, puisque des montagnes couvertes de neige, ainsi que nous l'avons déjà dit, sont visibles à cinquante lieues, et que ces mêmes montagnes dépouillées de leur neige ne sont plus visibles à une distance beaucoup moindre, l'effet de cette altération ne commence à être sensible pour nous que lorsque les corps sont à une certaine distance de notre œil et qu'on ne peut pas précisément déterminer, car elle varie selon la densité plus ou moins grande de l'air, ainsi que selon l'intensité de la lumière. En conséquence de cette distance plus ou moins grande des objets à notre œil, les ombres doivent augmenter d'intensité jusqu'à un certain point en s'éloignant de la base du tableau. Cette distance

sera généralement plus grande lorsque le ciel sera pur et moindre par un temps plus ou moins brumeux.

C'est ce qui a peut-être donné lieu à cet ancien usage de faire les ombres plus noires sur le devant du tableau (ce qu'on appelait *repoussoir*); c'est vraisemblablement une illusion d'optique provenant des contrastes ou oppositions qu'on n'avait pas observés avec assez d'attention. Par exemple, si nous regardons un cube, fig. 2, pl. 5, dont la surface *a* est éclairée directement par le soleil, et dont la face *b*, soit dans l'ombre, nous verrons la partie de cette ombre qui se trouve vers l'arête *cd*, évidemment plus foncée que les parties reculées de cette même surface, et nous croirons être bien persuadés que cela est ainsi. Cependant si nous appliquons sur la surface éclairée, une couche bien noire (ce qui ne doit rien changer à la surface *b*), nous verrons le contraire de ce que nous avions cru voir l'instant d'avant; c'est-à-dire que la partie qui nous paraissait la plus noire, nous paraîtra alors la plus claire, et réciproquement. Ce qui doit nous indiquer que nous ne devons foncer un peu les ombres sur les parties les plus proches, que dans les cas où il y a opposition ou contraste, et que dans toute autre circonstance, nous devons les tenir plus claires sur le devant. Nous voyons un exemple de cet effet, fig. 4, pl. 4, dans les plans *p*, *q*, de la muraille qui est sur le second plan du tableau. Enfin, nous en aurons encore un exemple des plus apparens, si nous regardons une corde tendue devant des objets plus ou moins sombres, ou de différentes couleurs plus ou moins foncées; cette même corde nous paraîtra alternativement claire sur un fond brun, et brune sur un fond plus clair, qu'elle n'est elle-même; enfin, nous ne pourrons plus la distinguer lorsqu'elle sera sur un fond dont le ton sera égal au sien, ce que nous ne pourrions pas nous persuader si nous n'étions pas certains que cette corde est d'une même couleur ou d'un ton uniforme.

Nous devons encore remarquer qu'en peinture on est obligé de

faire les ombres plus noires qu'elles ne le sont dans la nature, et comme c'est un reproche qu'on fait ordinairement aux peintres, nous devons tâcher de prouver que ce reproche est mal fondé. Prenons pour exemple un corps quelconque blanc, posé sur une surface qui soit aussi blanche, et le tout exposé au soleil; il est évident qu'il y aura nécessairement un rapport quelconque entre les parties éclairées et les parties ombrées. Si nous voulons imiter ce corps, nous serons obligés de conserver le rapport dont nous venons de parler. Supposons donc que la somme de lumière de la partie éclairée soit quatre et que celle de l'ombre soit deux, le rapport sera de quatre à deux. Mais comme le blanc le plus éclatant dont les peintres se servent, beaucoup au-dessous du brillant d'un corps blanc éclairé par le soleil, ne peut pas atteindre cet éclat, il nous faudra nécessairement augmenter l'intensité de l'ombre pour conserver le rapport qui est dans le modèle. Supposons donc encore que le blanc que nous employons soit moitié moins brillant que la partie éclairée du corps; nous aurons donc deux pour antécédent ou terme de notre plus grande lumière, par conséquent nous aurons un pour mesure de l'intensité de l'ombre, ce qui nous donnera cette proportion 4 : 2 : : 2 : 1; nous serons donc obligés de diminuer la lumière ou le ton de l'ombre, ce qui est la même chose que d'augmenter son intensité, ou la faire plus foncée. Voilà sur quels principes sont posées les bornes de l'art; ainsi, puisque nous ne pouvons pas atteindre au seul brillant d'un corps opaque et mat éclairé du soleil, à plus forte raison devons-nous renoncer pour jamais à peindre la lumière : c'est aussi ce qu'il convient d'éviter, autant qu'il est possible, parce que nous n'aurions pas de noir assez intense pour observer le rapport convenable entre les parties éclairées et les parties ombrées.

De la Lumière réfractée, ou de la Réfraction.

Jusqu'ici nous n'avons considéré la lumière que sous les deux rapports suivans : 1° la lumière émanant directement du corps lumineux jusqu'à nous ; 2° la lumière réfléchie par les différens corps opaques qu'elle rencontre. Il nous reste encore à la considérer lorsqu'elle traverse différens milieux plus ou moins denses et transparens, comme lorsqu'elle passe de l'air dans l'eau, le verre, etc. (fig. 3, pl. 5).

Si un rayon *ab* tombe perpendiculairement sur la surface *cd*, d'un milieu transparent (tel que du verre) dont les faces *cd*, *ef*, soient parallèles entre elles, ce rayon traversera le milieu selon la droite *abgh*, sans changer de direction ; la partie *ab*, du rayon qui tombe sur la surface *cd*, se nomme, comme dans la réflexion, le *rayon incident* et la partie *gh*, de ce même rayon qui sort du milieu par la surface *ef*, s'appelle *rayon émergent*. Si le rayon incident est *ib*, qui tombe obliquement sur *cd*, ce rayon au lieu de continuer sa route selon la droite *ibj*, comme dans le cas précédent, se brisera au point d'immersion *b*, en s'approchant plus ou moins de la perpendiculaire *bgh*, menée à la surface *cd*, et formera un angle *kbg*, nommé *angle de réfraction ;* la partie *bk*, se nomme *rayon réfracté* (ou rompu), et la partie émergente *kl*, reprendra la même direction qu'elle avait avant la réfraction, c'est-à-dire qu'elle sera parallèle à la direction *ij*, ou *ib* ; remarquons en passant que lorsque le rayon incident *ib*, touchera la surface *cd*, une partie de ce rayon ou faisceau lumineux sera réfléchie, selon les lois ordinaires de la réflexion, en *bm*, ce qui est la cause que le rayon émergent est toujours plus faible que le rayon incident.

On a observé qu'en général les corps les plus denses étaient aussi les plus *réfringens*, c'est-à-dire que plus un milieu est ré-

fringent, plus le rayon réfracté s'approche de la perpendiculaire. Il y a cependant une exception (dont on ignore la cause), qui est que les huiles, les essences, l'esprit de vin, plusieurs sels, etc., et en général tous les corps combustibles, solides et transparens, comme le soufre, le diamant, etc., qui ont une densité beaucoup moindre que le verre, l'eau, etc., ont cependant une qualité réfringente beaucoup plus grande. Nous reviendrons sur les propriétés de la réfraction lorsque nous parlerons des couleurs. Nous observerons seulement que la réfraction est la cause qui fait qu'un bâton plongé obliquement dans l'eau, nous paraît brisé au point d'immersion. Nous allons nous occuper de l'air comme milieu plus ou moins transparent, en remarquant encore avant d'aller plus loin, que le diamant, qui est le plus dur de tous les corps connus et qui est combustible, est reconnu sous ce double rapport comme étant le milieu le plus réfringent.

(Fig. 4). Nous savons par expérience que le corps le plus transparent, lorsqu'il a une certaine épaisseur, devient plus ou moins opaque; l'air est dans ce cas. Soient donc *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, autant de surfaces planes, moitié blanches, moitié noires, posées verticalement dans la campagne par un beau temps, et s'éloignant successivement du tableau vers l'horizon. Les parties noircies sont supposées si intenses qu'elles ne réfléchissent pas sensiblement de lumière vers notre œil. Nous considérerons le volume d'air interposé entre notre œil et le tableau (sur la base duquel repose le plan *a*) comme étant parfaitement diaphane à cause de son peu d'épaisseur, par conséquent les parties blanche et noire du plan *a*, n'éprouveront à notre œil aucune altération. Le volume d'air compris entre l'œil et le plan *b*, étant assez épais pour être un peu opaque, n'altérera pas la partie blanche de ce plan, mais l'altération de la partie noire se fera déjà sentir, et nous paraîtra légèrement bleue. Cette altération croîtra successivement jusqu'à la dernière, qui pourra se

trouver tellement éloignée que la partie blanche sera encore sensible à notre œil, lorsque la partie noire sera presqu'entièrement ou même totalement disparue. Quoique les surfaces blanches ne nous paraissent pas sensiblement altérées, elles le sont cependant un peu : d'abord, il est certain que plus elles sont éloignées de notre œil, et moins elles nous envoient de lumière; mais comme la grandeur de la surface diminue dans le même rapport, il y a à peu près compensation, ou bien l'altération est si peu de chose que si nous voulions l'observer nous en ferions des surfaces grises. Il est cependant vrai de dire que les corps blancs qui sont voisins de nous paraissent plus éclatans que ceux qui en sont plus éloignés; la raison de cet effet a principalement pour cause les contrastes dont nous avons déjà parlé. Ainsi la surface g', qui est aussi blanche que la surface *a*, nous paraît cependant moins brillante que cette dernière; ce qui est uniquement dû à ce qu'elle ne peut avoir à côté d'elle une opposition aussi forte que celle de la surface *a*. Un corps blanc, quel que soit son éloignement, doit donc nous paraître toujours blanc, puisqu'un grand volume d'air étant de la même couleur ne saurait l'altérer, même lorsqu'il fait du brouillard; il est vrai que dans ce dernier cas, un corps blanc qui s'éloigne successivement de nous disparaît à nos yeux à une très petite distance. Lorsqu'enfin il se trouve à l'unisson du ton du volume d'air, tant que nous le voyons, il ne cesse pas pour cela de nous paraître blanc; il sera seulement plus ou moins gris, et cela en raison de l'intensité de la lumière de l'air. Il suit de ce qui vient d'être dit que dans les lointains d'un tableau, nous devons plutôt nous attacher à éclaircir les bruns qu'à brunir les blancs. Nous allons en voir un exemple (fig. 1, pl. 6), dans lequel nous supposerons deux murailles parallèles entre elles; celle de gauche est dans l'ombre, et celle de droite est éclairée par le soleil; de plus, ces murailles sont, comme les plans de l'exemple précédent, moitié blanches

et moitié noires. Nous voyons dans cette figure que les surfaces blanches, qui réfléchissent le plus de lumière, n'éprouvent que très peu d'altération; que les deux chemins de sable, qui réfléchissent un peu moins de lumière que les murailles blanches, éprouvent un peu plus d'altération; que la pièce de gazon, qui en réfléchit moins que le sable, est aussi plus altérée; et enfin que les murailles noires, qui n'en réfléchissent pas sensiblement, sont beaucoup plus altérées que les autres. Ce qui doit déjà nous faire entrevoir que l'altération qu'éprouvent les corps diversement colorés, est toujours en raison directe de leur intensité ou de la plus ou moins grande quantité de lumière que ces corps réfléchissent.

Des Couleurs considérées, 1° dans la Lumière; 2° dans les Corps transparens; 3° dans les Corps opaques.

Nous ne connaissons pas plus la nature des couleurs que celle de la lumière; nous savons seulement que sans la présence de cette dernière il n'y a pas de couleurs. De là on a conclu que non-seulement les couleurs résidaient dans la lumière, mais encore qu'elles en étaient les parties constituantes. On aurait pu en dire autant de la forme des corps, si nous n'avions pas eu le sens du toucher pour rectifier celui de la vue. Ou bien, sachant que, sans un corps sonore et sans air, il n'y a pas de bruit, nous en eussions conclu que le son est partie constituante du corps sonore ou de l'air, ou bien encore de tous les deux. Mais comme les plus célèbres physiciens, tels que Descartes, Newton, Huygens, Euler, etc., etc., ne sont nullement d'accord entre eux sur ce sujet, nous nous croyons (sans témérité) autorisé à oser exposer notre opinion. Nous croyons donc que les couleurs ne sont que de pures sensations éprouvées par nous, causées par certaines modifications que la lumière

éprouve dans plusieurs circonstances, et paraissant avoir quelques analogies avec les modifications dont l'air est le siége, lorsqu'il est frappé par un corps sonore : en un mot, nous pensons que les couleurs sont à l'œil ce que le son est à l'oreille.

Nous allons d'abord considérer les couleurs en elles-mêmes d'une manière générale, c'est-à-dire, en faisant abstraction des matières qui les contiennent, ainsi que des moyens par lesquels elles sont produites. L'expérience et l'observation ont fait reconnaître que, par le mélange du rouge, du jaune et du bleu, on pouvait obtenir toutes les autres couleurs connues, et qué, par le mélange de toutes les couleurs excepté ces trois on ne pouvait produire ni le rouge, ni le jaune, ni le bleu. C'est par cette raison que nous avons nommé ces trois dernières, *couleurs primaires*. Si nous combinons d'abord ces trois couleurs deux à deux, le résultat sera une troisième couleur qui participera des deux que nous aurons employées et que nous nommerons *couleur binaire*. Par exemple, si nous mêlons le rouge avec le jaune, il en résultera une troisième couleur nommée *orangé;* le rouge avec le bleu donnera le *violet*, et le jaune avec le bleu produira le *vert*. Voilà donc trois nouvelles couleurs binaires produites par le mélange des trois primaires combinées deux à deux.

Enfin, si nous combinons ces trois couleurs ensemble en diverses proportions, nous aurons toutes les couleurs nommées *brunes*, telles que le brun-rouge, le brun-jaune ou bistre, le brun-vert ou vert-olive, le brun-violet, etc., etc., nous aurons même le noir; ces dernières couleurs sont nommées *ternaires*. Nous devons voir par ces expériences que si ces trois couleurs par leur réunion (en proportions convenables) produisent le noir, qui est la couleur qui absorbe le plus la lumière, il fallait bien que chacune de ces couleurs avant le mélange absorbât une partie plus ou moins grande de cette même lumière, et ce, en raison de son intensité. Nous devons donc voir par là que les couleurs, quoi-

qu'elles existent dans la lumière, ne peuvent en être les parties constituantes, car les parties d'un composé quelconque ne peuvent, par leur réunion, détruire ou absorber ce même composé. Il nous paraît donc plus probable que les couleurs ne sont produites que par différentes modifications de la lumière, modifications dont nous ignorons encore entièrement la nature, et si nous n'apprenons pas ce que sont les couleurs, nous saurons au moins ce qu'elles ne sont pas, et c'est beaucoup, car le doute est préférable à l'erreur.

Nous venons de voir que du mélange de deux couleurs il résulte toujours une troisième couleur qui participe des deux premières, mais qui n'est ni l'une ni l'autre d'elles; cette propriété est sans aucune exception. Ainsi, lorsque nous mêlons du rouge avec du blanc, le résultat sera toujours du rouge, qui sera seulement affaibli ou plus clair, mais il ne sera nullement altéré; et comme il en serait de même de toutes les autres couleurs que nous pourrions mêler avec le blanc, nous en conclurons que *le blanc n'est pas une couleur;* il n'indique seulement que la présence de la lumière.

Lorsque nous sommes dans un lieu entièrement privé de lumière, nous ne voyons absolument rien, par conséquent nous ne pourrions distinguer aucune couleur; nous pouvons cependant comparer, par la pensée, ces ténèbres dans lesquelles nous sommes plongés aux différentes couleurs que nous connaissons, et nous jugerons qu'elles sont analogues à ce que nous appelons couleur noire; et comme nous ne pouvons pas dire que nous voyons les ténèbres, par la même raison nous ne pouvons pas dire que nous voyons le noir, qui leur ressemble. Donc *le noir n'est pas une couleur;* il indique seulement l'absence de la lumière. Nous ne voyons cependant aucun inconvénient à appeler selon l'usage, le blanc et le noir, couleurs; il importe seulement de savoir à quoi s'en tenir sur la chose.

Pour nous assurer que les couleurs absorbent la lumière en raison de leur intensité, prenons un certain nombre de verres colorés, par exemple, en jaune, qui est la plus claire de toutes les couleurs; posons-en un sur un papier blanc; la lumière blanche réfléchie par le papier traversera le verre et nous paraîtra d'un jaune plus ou moins foncé en raison de l'intensité de la couleur du verre. Mettons un second verre sur le premier, nous verrons que la teinte jaune sera doublée; appliquons-en ainsi successivement plusieurs autres, la couleur sera si intense qu'elle ne renverra plus sensiblement de lumière à notre œil; en un mot nous ne pourrons plus distinguer cette couleur du noir. Or, si la plus claire de toutes les couleurs donne ce résultat, nous pouvons en conclure que le *maximum d'intensité d'une couleur quelconque est le noir*. D'ailleurs, ne voyons-nous pas tous les jours les graveurs rendre jusqu'à un certain point les couleurs des différens corps, par le seul moyen du noir et du blanc, ce qu'ils ne peuvent faire qu'en observant les quantités plus ou moins grandes de lumière que ces couleurs réfléchissent? Par exemple, si nous voulions imiter avec du noir et du blanc seulement, une surface moitié jaune-clair et moitié rouge-foncé, ou rouge-clair et jaune-foncé, ne serions-nous pas obligés d'employer des teintes d'un gris plus ou moins foncé? Si au lieu d'appliquer des verres colorés sur un papier blanc, nous faisons passer un rayon solaire à travers ces mêmes verres, nous aurons encore le même résultat. Nous aurons encore occasion par la suite de nous convaincre de cette vérité.

Des Couleurs considérées dans la Lumière.

Nous avons déjà vu que la lumière se manifestait à nos yeux de trois manières différentes, savoir : *directement, par réflexion et par réfraction.* Il nous reste encore à la considérer sous un

autre rapport. Par des expériences multipliées on a remarqué que lorsque la lumière passait près d'un corps, elle se déviait plus ou moins, c'est-à-dire qu'elle éprouvait une certaine inflexion, dispersion ou divergence, qu'on a nommée *diffraction*. Généralement, lorsque la lumière subit cette dernière modification, elle nous paraît colorée; quoique cet effet ne soit pas toujours sensible, il n'en a pas moins constamment lieu: la faiblesse des couleurs et la grande lumière du jour sont les principales causes qui nous empêchent de les apercevoir. Si, dans une chambre exactement fermée, nous faisons passer un rayon solaire par un trou d'aiguille fait dans une lame de plomb, et que nous placions verticalement dans le cône lumineux (dont le petit trou sera le sommet) un tube de verre d'environ une ligne de diamètre et dont l'intérieur sera noirci; si nous recevons l'ombre de ce tube sur une surface blanche, à une distance plus ou moins grande, nous verrons d'abord que l'ombre de ce cylindre sera sensiblement plus large que le diamètre du tube, ce qui n'a rien d'extraordinaire puisque la lumière diverge en sortant du trou; ensuite nous verrons de chaque côté de cette ombre une série de bandes colorées en violet, bleu, jaune, etc., etc.; la seconde série recommencera dans le même ordre, et ainsi de suite. Nous observerons que ces bandes augmentent toujours de largeur à mesure qu'elles s'éloignent de l'ombre, et s'affaiblissent dans le même rapport, au point qu'on aperçoit à peine les dernières. Il faut nécessairement, pour que cet effet ait lieu, que la lumière, en rasant le cylindre, s'écarte en divergeant, ou qu'elle éprouve une diffraction. Comme ces couleurs vont aussi en divergeant, elles doivent anticiper les unes sur les autres; aussi voyons-nous le violet près du bleu, le vert près du jaune, le jaune-orangé près du rouge, etc. Nous devons déjà entrevoir dans cette expérience, qu'il ne s'est réellement produit que les trois couleurs primaires

dont nous avons déjà parlé. Ainsi, voilà donc des couleurs formées par une modification particulière que la lumière éprouve dans cette simple réflexion, puisque le tube étant noirci dans son intérieur, il n'y a par conséquent qu'une seule réflexion à la surface extérieure. D'ailleurs si nous mettons à la place de ce tube de verre un cylindre de métal, nous aurons le même résultat.

Si nous soumettons à la même expérience un tube de verre semblable au premier, mais dont l'intérieur au lieu d'être noirci, soit rempli de mercure, cette colonne de mercure réfléchira la lumière qui avant d'être parvenue jusqu'à elle, aura été réfractée en traversant l'épaisseur du tube, et le sera encore en traversant de nouveau l'épaisseur de ce même tube après sa réflexion. Il y aura donc dans ce cas, réunion de la réflexion, des réfractions et des diffractions; nous aurons encore le même résultat, avec cette différence que les couleurs seront dans un ordre inverse de celles de la première expérience. De plus, si nous approchons tout près de notre œil une aiguille à coudre qui réfléchisse la lumière du soleil, nous verrons de semblables couleurs. Si nous rayons une plaque d'étain, et que nous l'exposions au soleil, nous aurons encore le même effet. Enfin, il n'est personne de nous, qui n'ait vu les superbes couleurs qui paraissent à la surface d'une bulle de savon exposée seulement à la lumière d'une croisée. Nous pourrions encore citer une foule d'exemples de cette espèce, qui toutes nous prouveraient que, dans la réflexion de la lumière, lorsqu'il y a en outre diffraction, il y a toujours formation de couleurs.

Des Couleurs formées par la Réfraction.

En parlant de la réfraction, nous avons vu que lorsqu'un rayon lumineux tombait perpendiculairement sur un milieu transpa-

rent dont les faces sont parallèles entre elles, ce rayon ne se détournait pas de sa route, ou n'éprouvait aucune réfraction. Nous allons voir de plus que son image n'est ni déformée ni colorée; elle sera seulement un peu plus grande, à cause de la divergence des rayons lumineux.

Soit, fig. 2, pl. 6, la projection verticale d'un rayon lumineux *acef*, tombant perpendiculairement sur la face *gh*, d'un cube de verre blanc. Si nous recevons (dans une chambre obscure) l'image de ce rayon à la distance d'environ dix ou douze pieds sur un plan ou carton blanc *kl*, nous verrons que cette image sera circulaire, incolore, et aura pour diamètre la droite *pq*. En supposant le plan *kl*, couché à droite dans le plan vertical, nous aurons le cercle *m*, ou à côté un cercle blanc sur un fond obscur. Nous voyons par là, que la lumière en traversant ce cube, n'a éprouvé aucune altération sensible.

Si maintenant nous faisons tomber de la même manière un semblable rayon sur la face *gh* (fig. 3) d'un prisme triangulaire *ghn*, qui soit moitié du cube précédent; que nous recevions l'image du rayon de la même manière, et à la même distance que le premier, nous verrons d'abord que cette seconde image sera très différente de la première :

1° La largeur selon le diamètre horizontal sera la même;

2° Le diamètre vertical aura environ cinq fois sa longueur;

3° La figure sera ovale;

4° Cette figure sera entièrement colorée, d'abord en rouge vers le haut en *r*, ensuite orangée en *o*, jaune en *j*, verte en *v*, bleue en *b*, légèrement violette ou indigo en *i*, enfin violette en *w*. Il suit de tout cela, qu'il faut nécessairement que la lumière ait éprouvé une forte réfraction dans le plan du diamètre vertical seulement. Après avoir été d'abord émerveillés de la beauté réelle des couleurs de cette figure, nous nous sentirons naturellement portés à rechercher les causes de ce phénomène. La première idée

qui se présentera à nous, est que la lumière pourrait bien être composée des sept couleurs que nous voyons; que, par une propriété particulière, le prisme aurait bien pu décomposer cette même lumière, en agissant sur elle à la manière d'un crible ou d'un tamis, et que par ce moyen les différens rayons colorés se soient séparés les uns des autres en sortant du prisme, etc., etc. Pour nous assurer de la vérité de ce fait, nous devons tâcher de trouver un moyen pour recomposer cette même lumière. Pour cela nous imaginerons de faire passer la totalité des rayons colorés à travers une lentille de verre, qui ne manquera pas de les rassembler à son foyer, et par là nos idées pourront être fixées.

Soit donc (fig. 4) *xyz*, une lentille de verre sur laquelle tombent tous les rayons colorés; si nous plaçons à son foyer *t*, le carton *kl*, nous verrons avec la plus grande satisfaction un petit cercle de lumière incolore. Par ce résultat, nos premiers soupçons se changeront en certitude, et notre joie pourra égaler celle d'Archimède. Nous conclurons donc, sans hésiter, que la lumière est composée de sept sortes de rayons colorés, que chacun de ces rayons a sa place assignée, qu'ils sont inégalement réfrangibles, c'est-à-dire qu'ils sont réfractés inégalement selon l'ordre de leurs couleurs; par exemple, que le rayon rouge 1*r* (fig. 3) s'écarte moins de la direction de son incidence *ac*1, que le rayon violet 7*w*, de la sienne *ef*7. L'échelle de réfrangibilité sera donc établie d'après l'ordre des places que chaque couleur occupe. Par conséquent, le rouge et le violet seront les deux extrêmes de cette échelle. Ces expériences spécieuses pourront d'abord nous séduire, mais prenons garde que le prisme ne soit pour nous, ce que la sirène est aux navigateurs; gardons-nous de décider d'après une première apparence. En examinant ces faits avec plus d'attention, nous pourrons peut-être y trouver plus d'un sujet de doute, ce qui nous empêchera de porter un jugement trop précipité, qui pourrait nous induire en erreur.

Voyons d'abord si la lumière est décomposée en passant par le prisme. Rappelons-nous 1° que le rayon ou le faisceau de rayons lumineux *acef* (fig. 2) a traversé le cube de verre sans éprouver d'altération sensible, ni par conséquent de décomposition ; à plus forte raison, il n'en aura pas éprouvé depuis son entrée jusqu'à la moitié de son épaisseur : or le prisme *ghn* (fig. 3), est la moitié de cette épaisseur ; donc la lumière n'éprouve aucune décomposition en traversant le prisme, et ce ne peut être qu'à sa sortie ou lors de son passage du verre dans l'air, qu'elle en peut éprouver. Nous pouvons donc conclure en toute sûreté que *la lumière n'est pas décomposée en passant par le prisme, et que les modifications qu'elle éprouve n'ont lieu qu'à sa sortie de ce même prisme ;* 2° si la lumière était décomposée dès son entrée dans le prisme, chaque couleur occuperait dans ce prisme la place qui lui est assignée par son degré de réfrangibilité, et en sortirait dans le même ordre par les points d'émergence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et par là formerait un cône tronqué *1r7w* lumineux et entièrement coloré, lequel cône, étant coupé à un endroit quelconque parallèlement à sa base, donnerait toujours une image colorée semblable à cette même base. Or, c'est ce qui n'arrive pas, ainsi que nous l'allons voir. Dans les expériences que nous venons de voir, nous avons pris un faisceau lumineux cylindrique, en faisant passer la lumière par une ouverture circulaire ; mais dans celles qui vont suivre, nous emploierons un faisceau de rayons ou un rayon quadrangulaire, c'est-à-dire que nous ferons passer la lumière par un trou carré, ce que nous croyons plus convenable, en ce que les bandes colorées au lieu d'être circulaires seront à peu près rectangulaires et parallèles entre elles, ce qui est plus simple et ne nuit en rien à l'explication.

Soit (pl. 7, fig. 1) un rayon lumineux semblable au précédent, mais passant par une ouverture carrée, ce qui lui donnera la forme quadrangulaire. Si, au lieu de recevoir d'abord son image

(appelée communément *spectre*) à une grande distance du prisme, nous la recevons immédiatement à sa sortie, nous aurons une image carrée et incolore. En éloignant un peu plus le plan, nous aurons encore un semblable carré, dont le côté supérieur sera seulement bordé d'une bande jaune très étroite. Un peu plus loin, cette bande s'étendra sensiblement en dedans du carré, et la partie qui touche au côté dans sa longueur sera bordée de jaune-orangé; en même temps, nous verrons le côté inférieur bordé d'une bande bleue, s'étendant un peu en dehors du carré. Si nous plaçons le plan en *n* (*voyez* la figure coloriée au-dessus), le côté supérieur sera bordé de rouge qui, s'étendant sur une partie du jaune, produira une bande orangée, ce qui formera trois teintes très distinctes, rouge, orangé et jaune. En bas, la bande bleue se sera étendue en largeur, et sera immédiatement suivie d'une bande violette étendue en dehors du carré, et la partie blanche du milieu sera plus étroite que dans les images précédentes. Reculons le plan en *qt*, nous verrons que les couleurs se seront beaucoup étendues, l'image se sera alongée, et le blanc intermédiaire aura disparu, le jaune et le bleu se toucheront sans se mêler, par conséquent il n'y aura pas encore de vert de produit. Enfin, si nous plaçons le plan au-delà du point *t*, comme en *s*, les couleurs s'étendront encore davantage, le jaune et le bleu par leur divergence se croiseront, ou anticiperont l'un sur l'autre, et par leur mélange produiront le vert. Cette couleur, qui n'existait pas auparavant, et que nous avons vue se former sous nos yeux, est une preuve assez convaincante que, quand bien même la lumière serait composée de rayons colorés, le rayon vert ne pourrait pas faire partie de sa composition.

Nous voyons de même le rouge s'étendre sur une partie du jaune, et former l'orangé. Ainsi, voilà donc les sept couleurs déjà réduites à cinq; il ne nous reste plus qu'à examiner l'indigo et le violet. D'abord l'indigo n'a pas pu être séparé du violet; il est

évident qu'il en fait partie : ce n'est pas une légère différence dans la nuance qui a pu légitimement faire adopter cette séparation. La cause de cette différence est que la teinte de rouge qui s'étend sur le bleu, va toujours en s'affaiblissant ; il en est de même de l'orangé et du vert, qui ne sont pas d'une teinte parfaitement uniforme. On aurait pu, avec autant de raison, diviser aussi ces deux couleurs, et dire ensuite que la lumière est composée de neuf rayons colorés, au lieu de sept. D'ailleurs, nous croyons qu'on n'a divisé que le violet seulement, parce qu'on avait besoin de faire coïncider les sept couleurs avec les sept tons de la musique.

Nous ne nous dissimulerons pas qu'il reste encore une grande difficulté à expliquer ; car comment concevoir que le rouge qui est placé en haut de l'échelle puisse agir sur le bleu qui est au bas de cette même échelle, sans altérer les couleurs intermédiaires?

D'abord, nous ne croyons pas que ce soit le rouge du haut qui colore le bleu en violet. La seule raison assez probable que nous puissions présenter, est que ce second rouge est le commencement d'une seconde série de couleurs, dont la suite est trop faible pour être sensible à notre vue. Nous fondons cette probabilité sur ce que, dans une infinité de cas, de semblables séries se sont présentées, ainsi que nous l'avons déjà vu. D'ailleurs, l'arc-en-ciel ne nous paraît-il pas souvent double, et peut-être est-il triple, ou même quadruple? Ainsi, il semble donc probable que la lumière, par les différentes modifications qu'elle éprouve par la diffraction, ne nous présente réellement que trois couleurs primaires ou génératrices de toutes les autres. A l'égard de la lumière blanche ou incolore, résultant de la réunion des sept couleurs du spectre au foyer d'une lentille, nous pouvons obtenir le même effet, en ne soumettant à l'expérience que les trois rayons, rouge, jaune et bleu; nous aurons les mêmes résultats, ce qui détruit entièrement l'opinion généralement adoptée, qu'il est absolument nécessaire d'en employer sept ni plus ni moins. Mais

comme la nature produit toujours les plus merveilleux effets en n'employant que les moyens les plus simples, et les moins multipliés, il aurait été plus conséquent de dire que la lumière est composée de trois rayons colorés, que d'en avoir admis sept, sans aucune nécessité.

Quant au foyer incolore dont nous venons de parler, on le juge ordinairement plus blanc qu'il ne l'est en effet, car il n'est qu'un blanc relatif. Notre erreur à ce sujet vient de ce que l'expérience se faisant dans une chambre obscure, nous n'avons point d'objet de comparaison. Si nous eussions fait passer par la lentille la même quantité de lumière sans qu'elle fût modifiée par la colorisation, et que nous eussions comparé les deux foyers, nous aurions vu qu'ils différaient sensiblement d'intensité, ce qui ne peut être autrement, puisque la lumière colorée par une diffraction plus ou moins forte, perd, en même raison, de son intensité. Le foyer résultant de la réunion des rayons colorés, ne diffère donc de l'autre que par la soustraction de la portion de lumière qui se trouve absorbée par la colorisation. La vérité de cette assertion nous sera de plus en plus confirmée par la suite. D'abord, si nous regardons les deux cercles de la figure 2, nous n'hésiterons pas à déclarer celui de droite plus blanc que celui de gauche; ainsi, sans nous en douter, nous avons porté un jugement erroné, car ils sont tous deux également gris. C'est absolument de la même manière que nous avons jugé le foyer provenant des rayons colorés, d'un blanc pur.

Nous avons déjà dit que la réunion de toutes les couleurs, ou seulement celle des trois couleurs primaires produisait le noir, et nous venons de voir qu'elle a produit le blanc; c'est donc bien le cas de dire ici que la différence de ces deux résultats n'est que *du blanc au noir*. Il faut pourtant tâcher de nous entendre sur cette contradiction qui n'est rien moins que réelle, ainsi que nous pourrons le voir. Nous répéterons encore ici la proposi-

tion que nous avons déjà avancée, que les couleurs, quelles qu'elles soient, ont la propriété, par leur mélange, de produire le noir, ou le gris, qui en est un diminutif; cette règle est générale et sans aucune exception. Que ces couleurs soient lumineuses par elles-mêmes ou non, nous pourrions encore croire d'après l'opinion générale, que les couleurs produites par le prisme sont immuables : c'est même pour cela qu'on les a nommées *couleurs primitives*. Examinons maintenant leur immutabilité. Pour nous en assurer : 1° exposons successivement à chacune des places colorées du spectre solaire, une surface colorée quelconque, par exemple, un morceau de drap teint d'un rouge analogue à celui du spectre. Lorsque ce drap sera sur le rouge de ce même spectre, sa couleur paraîtra beaucoup plus intense qu'elle ne le paraissait étant vue au jour. Lorsque le drap sera sur l'orangé, il paraîtra orangé-rouge foncé, ce qui doit être ainsi, puisque le rouge y est en excès. Sur le jaune, il paraîtra orangé; sur le vert, il paraîtra noir, parce qu'il y a réunion des trois couleurs; enfin, lorsqu'il sera sur le violet, il paraîtra pourpre : ainsi voilà donc ces couleurs réputées immuables, qui changent selon la loi générale de leurs combinaisons. 2° Si nous faisons passer un rayon solaire incolore par un milieu rouge *a* (fig. 3), le rayon émergent sera rouge; si nous faisons passer ce rayon rouge par un milieu jaune *b*, ce rayon sortira orangé; enfin, si nous faisons passer ce dernier par un milieu bleu *c*, ce rayon sortira incolore, et aura perdu de son intensité, en raison de celle des milieux colorés, c'est-à-dire que plus les couleurs des milieux seront foncées, plus aussi le rayon sera obscur, ou moins blanc qu'il n'était avant de passer par ces milieux. Puisque ce rayon sera moins blanc, il sera donc gris; or nous savons que le gris est un diminutif du blanc ou du noir : donc le mélange de toutes les couleurs produit le noir ou le gris, plus ou moins foncé, selon l'intensité de ces couleurs. Si nous recevons ce rayon gris sur

un prisme *d*, il en sortira, en nous présentant les sept couleurs du spectre telles que nous les avons déjà vues par les expériences précédentes. Ainsi, voilà donc une analyse ou décomposition d'un rayon incolore qui nous présente sept parties constituantes d'un composé qui n'en avait évidemment que trois. Nous pourrions encore ajouter d'autres preuves à l'appui de ce que nous venons de dire, mais le but et les bornes de cet Ouvrage ne nous le permettent pas.

On pourrait encore nous objecter en faveur de la différente réfrangibilité des couleurs, qu'il est pourtant évident que le rayon violet se détourne beaucoup plus de sa route que le rayon rouge. Ce fait est incontestable, et nous pensons qu'il peut s'expliquer ainsi : les rayons qui forment un faisceau lumineux, n'étant jamais parallèles entre eux, doivent tomber sur la surface émergente du prisme, sous des angles d'incidence plus ou moins grands; par conséquent chacun de ces rayons en sortant du prisme doit être réfracté selon son angle d'incidence. C'est ce que nous allons tâcher de prouver par le moyen de la figure suivante. Soit *a* (fig. 4) un point radieux d'où émanent les rayons *ab*, *ac*, *ad*, qui tombent sur la face *ef* d'un prisme *efg*, rectangulaire en *f*. Les rayons *ab*, *ad*, étant également inclinés sur *ef*, seront également réfractés dans le prisme; ainsi l'angle *ebb'* sera égal à l'angle *fdd'*; le rayon *ac*, ou l'axe du faisceau, étant perpendiculaire sur *ef*, n'éprouvera aucune réfraction depuis son entrée *c*, dans le prisme, jusqu'à sa sortie *c'*; mais, à ce point, il sortira du prisme pour entrer dans l'air; et, comme il est incliné sur *eg*, il éprouvera une réfraction en raison de l'inclinaison de son incidence sur *eg*, et prendra la direction *c'c''*. Il en sera de même des rayons *abb'*, *add'*, qui seront réfractés dans l'air, selon les directions *b'b''*, *d'd''*. Observons que *bb'* est moins incliné sur *eg* que ne l'est *cc'*; aussi sa réfraction *b'b''* est-elle moins forte que celle *c'c''*, et la droite *dd'*, étant plus inclinée encore sur *eg*, que les

deux autres, sa réfraction $d'd''$ doit aussi être plus forte que celles des deux autres rayons. Il en serait de même de tous les autres rayons intermédiaires entre b et d. Nous voyons donc évidemment que la place qu'occupe chacun de ces rayons dans le spectre, est tout-à-fait indépendante de la prétendue réfrangibilité des couleurs, et que quand bien même ces couleurs n'existeraient pas, ces rayons n'en occuperaient pas moins les places qui leur sont assignées par la loi ordinaire de la réfraction.

De plus, le rayon $d'd''$ est beaucoup moins lumineux que le rayon $b'b''$, parce qu'il a traversé une plus grande masse de verre que ce dernier. Ainsi, il paraît donc assez probable que le rayon $b'b''$ est plutôt violet, parce qu'il est plus réfracté et plus diffracté que tous les autres rayons du même faisceau, et non pas qu'il est plus réfracté que les autres, parce qu'il est violet, ce qui n'est pas la même chose.

Nous ne pouvons pas passer sous silence une expérience qui est regardée généralement comme étant la base sur laquelle repose la réfrangibilité des couleurs. Soit un rectangle (fig. 5) moitié rouge, moitié violet, et placé sur un fond noir. Si nous regardons ce rectangle d'une certaine distance, par l'une des faces d'un prisme, nous verrons que la partie violette nous paraîtra plus basse que la partie rouge, ce qui semble confirmer que le violet est réellement plus réfrangible que le rouge. Comme nous ne pouvons pas nous refuser à l'évidence de ce phénomène, il convient de l'étudier avec attention, et de ne pas prononcer d'après une seule expérience. Si nous plaçons ce même rectangle sur un fond blanc, comme celui qui est à droite de la figure, et que nous le regardions par la même face du prisme, la partie qui nous avait paru la plus basse, nous paraîtra alors la plus élevée. Dirons-nous dans ce cas que le rouge est plus réfrangible que le violet? Dans cette incertitude, raisonnons ainsi : si cet effet tient à la réfrangibilité des couleurs, il ne doit pas

avoir lieu, en soumettant à la même expérience un semblable rectangle qui soit incolore, c'est-à-dire, qui soit moitié gris foncé et moitié clair; mais comme le contraire arrive, et que cet effet est le même, il ne dépend donc pas des couleurs; il tient plutôt à la différence plus ou moins grande des quantités de lumière réfléchies par ces deux surfaces, ou à la diffraction plus ou moins forte qui s'opère à leurs limites, en raison des oppositions.

Enfin, soient deux rectangles *ab*, *cd* (pl. 8, fig. 1), divisés chacun en sept cases; le premier sera coloré selon l'ordre des couleurs du spectre solaire, le second sera incolore et sera teinté graduellement jusqu'à la dernière case. Si les couleurs sont réfrangibles selon l'ordre des places qu'elles occupent, en les regardant avec le prisme, elles doivent paraître plus ou moins élevées d'une manière uniformément graduée, et ce même effet ne doit pas avoir lieu à l'égard du rectangle incolore *cd*, en le regardant aussi par la même face du prisme. Hé bien, c'est le contraire qui arrive; le niveau des cases colorées paraît très irrégulier, et celui des cases simplement grises de *cd*, paraît augmenter progressivement et régulièrement selon l'ordre de leur intensité. Cette dernière expérience doit lever tous les doutes (s'il nous en restait encore) que nous pourrions avoir à ce sujet. Nous n'avons pas dit que ces différentes cases étaient plus ou moins élevées les unes que les autres, mais seulement qu'elles le paraissaient, car cet effet n'est encore qu'une illusion d'optique, qui paraît dû seulement à la différence d'intensité des cases colorées ou incolores; nous croyons effectivement qu'elles sont également larges sur toute leur longueur.

Les expériences que nous venons de décrire exigent un appareil que l'on n'a pas toujours à sa disposition, surtout la présence du soleil. Voici un moyen très simple et peu dispendieux, par lequel nous pouvons facilement les répéter en partie, ainsi

25

que celles dont nous parlerons encore par la suite : prenons une feuille de papier noir, au milieu de laquelle nous ferons un trou rond ou carré ; ensuite collons cette feuille à l'un des carreaux de la croisée, et regardons le trou rond ou carré avec un prisme de flint-glass, d'abord de très près et ensuite à différentes distances ; ou plus simplement encore, en mettant cette feuille sur une table ou bien en l'appliquant à la muraille. En général, plus le trou carré ou rond est grand, plus aussi la distance d'où on le regarde doit être grande, de manière que si c'était un trou d'aiguille il produirait tous ses effets à la distance de quelques pouces.

Si la lumière soumise au prisme présentait toujours les sept couleurs du spectre, et que quatre d'entré elles ne fussent point le résultat du mélange des trois autres, elle devrait aussi les produire dans l'expérience suivante, qui est la plus simple et en même temps la plus décisive en faveur du système des trois couleurs, et qui nous fera voir (jusqu'à un certain point) l'analyse et la synthèse du noir formé par les trois couleurs primaires, qui sont très distinctes, et ne se mêlent nullement. Faisons sur la vitre d'une croisée ou sur une feuille de papier blanc un carré noir (fig. 2) ; regardons ce carré par un prisme, d'abord de très près ; nous n'y verrons aucune couleur : tel est le carré n° 1 ; en nous éloignant un peu nous verrons, n° 2, la limite supérieure bordée d'un liseré bleu, et l'inférieure d'un liseré jaune ; d'un peu plus loin, n° 3, nous verrons le bleu s'étendre en dehors de la figure, et être terminé dans cette même figure par une bande violette, la limite inférieure terminée par une bande ou frange orangée, et le jaune très étendu en dehors la figure ; en nous éloignant encore, nous apercevrons la fig. n° 4, et enfin la fig. n° 5, dans laquelle le violet aura disparu et ou les trois couleurs seront entièrement séparées. Voilà donc les trois couleurs primaires qui semblent être sorties du noir qui a entièrement

disparu. Voulons-nous recomposer ce noir? rapprochons-nous dans le même ordre; les couleurs disparaîtront et le noir sera régénéré.

Voulons-nous voir comment s'est formé le vert du spectre dans les figures précédentes? concevons deux carrés noirs *ab*, *cd* (fig. 3), vus tous deux en même temps par le prisme; ces deux carrés isolés ou éloignés l'un de l'autre, présenteront chacun une figure semblable à celle du n° 5, précédent. Supposons maintenant ces carrés rapprochés comme en *ef*, *cd*; le jaune de l'un se mêlera avec le bleu de l'autre, et le vert sera formé. C'est ainsi qu'il se produit dans toutes les expériences sur la lumière, qui ont les couleurs pour objet. Nous devons enfin être persuadés que les couleurs ne se forment que par la diffraction que la lumière éprouve aux limites d'un corps, et même à celles d'une surface blanche sur un fond noir, et réciproquement. Nous pouvons réunir ces dernières expériences dans une même figure, et par là les comparer plus facilement. Traçons sur un papier blanc un rectangle *ik*, fig. 4, que nous diviserons en deux; par la droite *ef*; formons les rectangles *af*, *be*, *hd*, que nous noircirons; nous aurons un rectangle blanc *ah* sur fond noir et un rectangle noir *hd* sur fond blanc. Regardons cette figure avec un prisme, d'abord à une petite distance; nous verrons le rouge sur *ag* et le bleu sur *gd*, qui est le prolongement de *ag*; ces deux couleurs seront donc sur la même ligne, elles auront donc dans ce cas, le même degré de réfrangibilité. Il en sera de même à l'égard de la ligne *bc*, dont le bleu sera sur *bh*, et le rouge sur son prolongement *hc*; ce qui est absolument l'inverse de la première *ad*. Or, puisque ces couleurs opposées se trouvent sur la même ligne, elles sont donc également réfrangibles. Nous avons déjà vu qu'elles l'étaient alternativement plus l'une que l'autre; d'après ces contradictions, nous pouvons donc raisonnablement croire qu'elles ne le sont pas

plus les unes que les autres. Si nous regardons cette figure d'une plus grande distance, nous verrons dans le rectangle *bg* toutes les couleurs mélangées telles qu'elles se trouvent dans le spectre produit par un trou carré, et dans le rectangle noir *hd*, les trois couleurs primaires séparées et sans mélange de vert, telles qu'elles sont n° 5 (fig. 2).

Des Couleurs considérées dans les Corps transparens.

Chacun sait qu'un corps à travers lequel la lumière peut passer, est nommé *transparent*. Lorsque la lumière traverse un corps de cette nature et qu'elle en sort sans avoir subi d'altération, on dit que ce corps est *blanc;* mais lorsqu'elle en sort colorée, on dit alors que ce corps est *coloré*. Par exemple, si nous faisons passer un rayon solaire incolore à travers un verre dont les surfaces soient parallèles entre elles et que ce rayon en sorte rouge, nous dirons que ce verre est *rouge*, ne sachant comment le désigner autrement, car nous savons bien que la couleur ne fait pas partie de ce corps et qu'elle ne doit son existence qu'à la présence de la lumière. D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, nous avons pu croire avec quelque apparence de raison, que la diffraction était la principale cause de la colorisation de la lumière. Mais ici que la lumière n'éprouve ni diffraction ni réfraction sensible, et que cependant elle se colore entièrement, à quelle cause pouvons-nous attribuer ce phénomène? Nous déclarons que nous n'en savons absolument rien. Nous savons bien qu'en faisant une pareille question et une telle déclaration, nous serons d'abord taxés d'ignorer les premières notions de la doctrine généralement reçue. Nous n'en persistons pas moins à croire qu'il est probable que cette question ne sera pas résolue de sitôt. Nous n'ignorons cependant pas les raisons que l'on donne communément, mais elles ne

nous paraissent pas réunir le degré d'évidence nécessaire pour fixer notre jugement sur ce sujet ; nous allons cependant les examiner, si ce n'est avec toutes la science requise, ce sera au moins avec toute la bonne foi dont nous sommes capable.

Ces raisons sont principalement : que la lumière étant composée de sept sortes de rayons différemment colorés, ces rayons ne peuvent tous passer indifféremment par un même milieu transparent et coloré ; que cela n'arrivera qu'à celui dont les molécules colorées seront en conformité avec les pores formés dans ce milieu, par une disposition particulière des molécules de ce même milieu ; c'est-à-dire, que si un rayon incolore *ab* (fig. 5), traverse un verre et qu'il sorte de ce verre entièrement teint de la couleur de ce milieu (tel que le rayon émergent *ef*), la cause principale de cet effet, est que les pores de ce verre sont tellement conformés ou disposés qu'ils ne laissent passer que les rayons rouges, par exemple, contenus dans le faisceau lumineux, et que les six autres sortes de rayons sont, ou réfléchies à la surface, ou absorbées dans l'intérieur de ce même verre ; on dit aussi, par une suite nécessaire de ce principe, qu'il doit arriver que si on joint ensemble deux verres de couleurs différentes, par exemple, un verre rouge et un verre bleu (tel que *cd*, fig. 6), la lumière ne traversera pas ces deux milieux parce que les rayons rouges ayant traversé le verre de cette couleur, seront arrêtés à la surface du verre bleu, qui ne donnera passage qu'aux rayons de cette dernière couleur. Nous avouons qu'on ne peut pas tirer de ce principe une conséquence qui soit plus juste, et qui puisse mieux prouver la vérité de cette proposition : et si le fait se présente tel qu'il est annoncé, nous ne pouvons nous dispenser de reconnaître que la lumière est composée de sept sortes de rayons colorés. Mais si, contre toute attente, le rayon rouge passait à travers le verre bleu, nous devrions nécessairement en tirer une conséquence opposée. Hé bien ! non-

seulement ce rayon passera, mais encore il ajoutera à sa couleur rouge, la couleur bleue du second milieu, et par conséquent il sortira du verre bleu coloré en violet. Il en sera de même de toutes les autres couleurs. Donc, etc., etc. Quelques physiciens pénétrés sans doute des mêmes principes, sur la composition de la lumière, ont avancé (en parlant de l'immutabilité des couleurs) que chacun des sept rayons pouvait traverser un milieu d'une autre couleur que la sienne, sans en éprouver aucune altération. Ce que nous venons de voir prouve que ce fait, fondé sur la même supposition, n'est pas plus exact que les précédens de même nature. De ce qui vient d'être dit il suit que *la lumière n'est point composée de différens rayons colorés, mais bien qu'elle se modifie en prenant les couleurs des différens milieux qu'elle traverse.* Nous ignorons entièrement comment s'opère cette modification; nous savons seulement qu'elle existe. Les simples expériences suivantes qui sont à la portée de tout le monde, contribueront à confirmer la vraisemblance des opinions que nous osons exposer sur ce sujet, en ne voulant, au reste, voir dans les faits que les faits eux-mêmes et leurs conséquences les plus immédiates.

Si nous regardons un corps blanc par le moyen d'un verre rouge, ce corps nous paraîtra rouge; si c'est avec un verre jaune, il nous paraîtra jaune, etc.; si nous regardons ce même corps blanc avec ces deux verres réunis, il nous paraîtra orangé. Enfin, si nous ajoutons à ces deux verres, un troisième verre qui soit bleu, le corps blanc nous paraîtra gris, ou brun si la couleur de l'un de ces trois verres est dominante, ou si ces couleurs ne sont pas dans les proportions requises pour produire le gris. En un mot, le corps blanc nous paraîtra d'un gris d'autant plus foncé, que les couleurs des verres seront elles-mêmes plus foncées. Si nous regardons un corps coloré en vert, avec un verre rouge, ce corps nous paraîtra noir, etc. Si nous fai-

sons passer un rayon solaire incolore à travers un verre brun, le rayon émergent sera brun. Ainsi dans ce cas, le verre brun aurait laissé passer des rayons bruns qui n'existent pas parmi les sept rayons, qu'on suppose composer la lumière. Enfin, si nous faisons passer successivement toutes les couleurs du spectre solaire par des verres colorés, nous obtiendrons toujours les mêmes résultats que nous venons d'avoir. Ce qui confirme cette vérité, que la loi de la combinaison des couleurs est générale. Si la lumière était composée de différens rayons colorés, en passant par le prisme elle devrait produire les mêmes couleurs à toutes les hauteurs de l'atmosphère; cependant on prétend que l'aéronaute Robertson a déclaré qu'à la plus grande hauteur à laquelle il s'est élevé, le prisme lui a donné des couleurs si faibles et si vagues, qu'à peine il a pu les distinguer; il était cependant encore bien éloigné des dernières limites de l'atmosphère. D'après cela, il nous paraît probable qu'à une plus grande hauteur, la lumière ne produirait pas de couleurs; d'où il suivrait (si le fait est vrai) que la production des couleurs ne serait due qu'à de certaines modifications ou combinaisons de la lumière, qui n'auraient lieu que dans les basses régions de l'atmosphère.

Des Couleurs considérées dans les Corps opaques.

Nous entendons par les couleurs des corps opaques, l'apparence colorée de tous les corps qui ne sont pas transparens, ou bien qui réfléchissent la lumière plutôt que de la laisser passer dans leur intérieur, ainsi qu'il arrive à l'égard des corps transparens. Il nous semble qu'un rayon coloré quelconque, obtenu par le moyen du prisme ou par celui d'un verre de couleur, ne peut colorer une surface plus qu'il ne l'est lui-même, c'est-à-dire, qu'il ne peut donner à cette surface que la somme de

couleur qu'il contient lui-même, et encore moins lui communiquer une autre couleur que la sienne propre. Si nous plaçons dans une chambre entièrement obscure une surface divisée en trois parties, dont la première sera blanche, la seconde rouge et la troisième bleue (fig. 7); si nous introduisons dans cette chambre, pour toute lumière, un faisceau lumineux rouge, la partie blanche de cette surface sera certainement colorée de toute la puissance colorifique du rayon, c'est-à-dire qu'elle ne pourra être ni plus ni moins colorée que le rayon ne l'est lui-même. Nous verrons cependant la partie rouge de cette même surface non-seulement plus colorée que la partie blanche, mais encore plus que le rayon ne l'est lui-même. Or, puisque le rayon n'a pu donner à cette surface entière que la somme de couleur qu'il contenait lui-même, d'où peut donc provenir cet excédant de couleur qui paraît étranger au rayon, puisqu'il est plus intense que lui? Qu'il soit inhérent à cette surface, cela est difficile à concevoir, et par conséquent à expliquer. La seule opinion conjecturale que nous puissions exposer à ce sujet, est que la lumière rouge du rayon a éprouvé à la rencontre de cette surface une seconde modification de même nature que la première, lorsqu'elle a traversé le verre rouge. A l'égard de la partie bleue qui est ici colorée en violet, la difficulté est encore plus grande; car puisqu'il n'y a dans la chambre d'autre lumière qu'une lumière rouge, celle-ci n'a pu fournir ou donner le bleu qui fait partie du violet que nous voyons. Il nous paraît donc de toute nécessité que la lumière rouge du rayon se soit en partie modifiée en bleu, à la rencontre de la surface. Ainsi, il paraît donc très vraisemblable que *les couleurs des corps opaques résultent non point de la décomposition de la lumière à la rencontre des surfaces de ces corps, mais bien des différentes modifications qu'elle éprouve à la rencontre de ces mêmes corps.*

Quant à la nature de ces modifications, si l'explication que nous venons de donner ne satisfait pas entièrement, il ne nous reste qu'à dire tout *vulgairement* qu'un corps est rouge, vert ou bleu, parce qu'il est rouge, vert ou bleu.

Il y a environ trente-six ans qu'un peintre anglais, nommé *Palmer*, fit connaître à Paris, une application de la combinaison des couleurs très avantageuse aux peintres en miniature, qui peuvent, par le moyen qu'il a indiqué, travailler à la lueur d'une lampe, aussi facilement qu'à la lumière du jour. Sa lampe était dans une boîte carrée, dont le devant était fermé par un carreau formé avec deux verres blancs parallèles entre eux; et dont l'intervalle était rempli d'une eau bleue, colorée au degré d'intensité convenable. Il obtenait ainsi une lumière aussi incolore que celle du jour, et à la lueur de laquelle on pouvait distinguer aisément toutes les nuances du jaune et du vert, ce qui est impossible à la lueur d'une lampe ordinaire. D'après ce que nous avons dit, il ne nous sera pas difficile de sentir la raison de cet effet. La lumière d'une lampe quelconque est toujours d'une couleur plus ou moins orangée, par conséquent composée de jaune et de rouge. Cette lumière orangée, en traversant le milieu bleu, se charge de cette dernière couleur; et les trois couleurs primaires se trouvant par là réunies dans les proportions requises, il en résulte une lumière blanche, plus ou moins intense. D'après tout ce qui précède, nous voyons donc que la lumière est susceptible de produire en nous des sensations de couleurs, en se modifiant de plusieurs manières : 1° par la réflexion des surfaces polies; 2° par la réfraction et la diffraction en traversant les corps transparens; 3° par sa réflexion à la surface des corps opaques, que nous nommons *corps colorés*.

En peinture, on divise les couleurs matérielles ou substances colorées, en deux classes, que l'on désigne sous les noms de couleurs *transparentes* et de couleurs *opaques*. La nature de ces

couleurs doit être suffisamment connue, par ce que nous avons dit des corps transparens et des corps opaques. Ainsi, les couleurs qui ressembleront plus ou moins à ces corps, seront plus ou moins transparentes, ou plus ou moins opaques. Par exemple, le carmin, la gomme gutte, l'outremer, etc., sont des couleurs transparentes. Le blanc, le vermillon, le minium, les ocres, etc., sont des couleurs opaques, parce que les premières de ces couleurs laissent passer la lumière dans leur intérieur, et que les dernières la réfléchissent à leurs surfaces. On doit, en général, préférer les substances colorées les plus foncées en couleur, parce qu'il est toujours facile de les éclaircir en y ajoutant du blanc, de l'huile, de l'eau, etc., et qu'il est impossible de les foncer plus qu'elles ne le sont naturellement. Quand on ignore la loi des combinaisons des couleurs, on est souvent très embarrassé de se rendre raison de certains phénomènes qui se présentent fréquemment aux yeux des personnes qui commencent à peindre. Par exemple, si l'on prend deux couleurs très brillantes, chacune séparément, du vermillon et de l'outremer par exemple, et que l'on se propose d'obtenir par leur mélange un beau violet, on est très étonné d'avoir pour résultat une couleur sale, terne, et fort désagréable à l'œil. Ne sachant à quoi attribuer cet effet, on a tout uniment dit que ces couleurs avaient des *inimitiés*, des *antipathies*, etc., parce qu'on ignorait, ou que l'on ne faisait pas attention, que la couleur du vermillon n'est pas le rouge primaire, qu'il entre du jaune dans sa composition, ce qui le rend un peu orangé ; et qu'en y ajoutant du bleu, les trois couleurs se trouvent réunies, d'ou il résulte une couleur plus ou moins brune, nommée techniquement *couleur rompue*.

Si les couleurs lumineuses, par leur réunion, régénèrent la lumière pure et incolore, les couleurs opaques ou matérielles devraient par leur réunion, aussi régénérer le blanc pur et opaque ; et plus ces substances seraient riches en couleur, plus aussi le

blanc qui en résulterait devrait être pur ou brillant. Cependant l'expérience nous prouve le contraire : plus ces couleurs sont intenses, plus aussi le noir qui en résulte sera foncé. Si à ce noir on ajoute plus ou moins de blanc, il devient plus ou moins gris. Eh bien, c'est ce gris plus ou moins clair que l'on prend généralement pour du blanc, ce que nous allons voir par l'expérience suivante. Si nous broyons ensemble des couleurs primaires très claires (comme on a coutume de le faire), qui par conséquent réfléchissent beaucoup de lumière, le résultat doit en réfléchir dans le même rapport; et si nous comparons ce résultat gris-clair, au noir, nous le jugerons blanc; mais si nous voulons le comparer avec du blanc même ordinaire, nous serons bientôt détrompés. Les combinaisons des trois couleurs primaires peuvent être exposées d'une manière très simple par la figure 8. Si quelques-uns de nos lecteurs voulaient en savoir davantage sur cette matière que nous n'avons dû qu'effleurer, nous les engagerions à recourir aux différens ouvrages qui traitent spécialement de l'Optique.

FIN DES NOTIONS D'OPTIQUE.

LIVRE QUATRIÈME,

DE LA PROJECTION OU CONSTRUCTION DES OMBRES.

Les articles précédens nous ont déjà donné une idée générale des ombres. Nous allons maintenant nous occuper plus particulièrement de la construction des ombres produites par les corps qui sont exposés aux différentes sortes de lumières (fig. 1 et 2, pl. 1).

Problème premier. *Les projections d'un point lumineux étant données, ainsi que celles d'une droite, trouver la direction et la longueur de l'Ombre de cette droite, sur le plan horizontal.*

Soient ab, la commune section des deux plans *c*, cC′, les projections de la lumière, *d*, dD′, celles de la droite donnée. Puisque du point lumineux C, il émane un nombre indéfini de rayons, il y en aura nécessairement un qui passera par D, extrémité du jalon ou de la droite donnée *d*D, et qui se projettera obliquement sur le plan horizontal en *e*; par conséquent ce point sera l'ombre du point D : d'autres rayons, tels que C1, C2, C3, etc., seront interceptés par le jalon; il y aura donc derrière celui-ci un triangle rectangle D*de*, qui sera privé de lumière. Ce triangle peut être considéré comme étant un plan vertical qui s'entre-coupe avec le plan horizontal, et dont l'intersection sera la droite ou trace *de*, ou bien l'ombre du jalon projetée sur le plan horizontal. Nous pouvons aussi considérer cette ombre comme étant la projection horizontale de la droite D*e*, hypoténuse du triangle D*de*. Concevons ce triangle prolongé indéfiniment à gauche; nous verrons que son plan passera par la lumière C*c*; cette lumière ainsi que la droite donnée

D*d*, et l'ombre *de*, seront donc dans un même plan vertical, et puisque *de* est la projection de D*e*, *cd* sera celle de CD, ou bien *ce* sera la projection du rayon C*e*, ou de l'hypoténuse du triangle rectangle C*ce*; par conséquent, l'ombre portée par la droite D*d*, se trouvera dans la trace d'un plan vertical passant par les projections horizontales de la lumière, et celles de la droite donnée. D'ou il suit que pour trouver l'ombre d'une droite sur un plan horizontal, il faut faire passer par cette droite et par la lumière, un plan vertical, dans lequel doivent nécessairement se trouver les rayons qui passeront par les extrémités de la droite donnée, jusqu'à la rencontre du plan horizontal. Exemple : soient donnée la droite D*d*, la hauteur *c*C, du point lumineux, et qu'il s'agisse de trouver sur le plan horizontal l'ombre de cette droite; par les points *c*, *d*, projections horizontales de la lumière et de la droite donnée, menons une droite indéfinie *cde*, qui sera la trace du plan vertical passant par la lumière et par la droite *d*D; ensuite, par le point lumineux C, et par D, extrémité de la droite, nous mènerons un rayon indéfini qui rencontrera le plan horizontal et la trace *ce*, en un point *e*, qui sera l'ombre du point D. Le rayon C*d*, qui rencontre le plan horizontal au point *d*, lui-même déterminera l'ombre de ce point à cet endroit même, et l'ombre cherchée sera la droite *de*. Faisons de suite l'application de cette règle à la fig. 2, dans laquelle les données, ainsi que les lettres, sont les mêmes que celles de cette figure.

Soient *c*, cC′, *d*, dD′, les projections horizontales et verticales de la lumière et de la droite donnée. Menons par *c*, et par *d*, une droite indéfinie, que nous considérerons comme étant la trace du plan vertical dont nous avons parlé ci-dessus. Faisons tourner ce plan sur la droite *ce*, jusqu'à ce qu'il soit couché dans le plan horizontal, ce qui se fait, comme nous le savons, en menant une perpendiculaire indéfinie à la trace *ce*, sur laquelle nous porterons cC′, hauteur de la lumière, de *c* en C; renversons de même

la droite donnée, en menant une perpendiculaire au point *d*, sur laquelle nous porterons dD′, hauteur de cette droite, de *d* en D; ensuite du point lumineux C, et par D, extrémité de la droite, menons CD, qui rencontrera le plan horizontal en un point *e*, ce qui déterminera la longueur de l'ombre *de*. Nous devons nous étendre un peu sur ce premier problème, parce qu'il est le fondement de la construction des ombres, ce qui le rend très nécessaire à l'intelligence des problèmes que nous avons à résoudre (fig. 1, pl. 1).

Si nous concevons un plan Ce, perpendiculaire au plan vertical, et passant par le rayon lumineux C*e*, la trace ou l'intersection C′e, de ces deux plans, sera la projection verticale du rayon C*e*, laquelle passera par D′, extrémité de la projection verticale de la droite donnée; de même, ce sera la projection verticale de *ce*, et, par la même raison, de sera la projection verticale de l'ombre *de*. Nous voyons de plus que le point *e* se trouve sur la droite e*e*, qui est perpendiculaire à la section commune *ab*, que nous pouvons encore considérer comme étant la trace horizontale du plan Ce. D'où il suit que nous avons un nouveau moyen de déterminer l'ombre de la droite, sans nous servir du rayon lumineux C*e*, en employant seulement les projections de ce même rayon, ce qui, dans plusieurs cas, abrège et simplifie les opérations.

Faisons abstraction du point lumineux C, ainsi que du rayon C*e*, et ne considérons que les projections horizontales et verticales de la lumière et de la droite. Par les points *cd*, menons une droite indéfinie, et par les points verticaux C′D′, menons une autre droite prolongée jusqu'à la rencontre de la commune section en e; de ce point menons à ab, une perpendiculaire prolongée jusqu'à la droite *ce*, qu'elle coupera en *e*, qui sera le point cherché. Appliquons cette opération à la fig. 2, et nous aurons le même résultat.

Cette seconde manière est celle dont se servent la plupart des dessinateurs, qui aussi pour la plupart tombent dans une grande erreur, en prenant la projection verticale du rayon pour le rayon lui-même. Cette erreur ne peut être préjudiciable à l'opération, mais elle l'est beaucoup à l'intelligence de la chose, ainsi que nous le verrons par la suite. Voyons maintenant comment nous pourrons déterminer l'ombre d'une droite dont une partie serait interceptée par un plan vertical (fig. 1).

Soit *f*F, la droite donnée, par laquelle et par la lumière *c*C, nous ferons passer un plan vertical dont la trace horizontale sera la droite *cg*; ensuite menons le rayon CF, prolongé jusqu'au plan horizontal où il coupera *cfg*, en un point *g*; *fg* serait l'ombre de la droite *f*F, s'il n'y avait pas d'obstacle. Mais comme au point *h*, il y a un plan vertical *jk*, qui doit intercepter une portion de cette ombre, il nous faut voir ce que cette portion deviendra. Par l'inspection de la figure nous voyons d'abord que le rayon CF ne peut pas parvenir en *g*, qu'il est arrêté par le plan *jk*, au point *l*; ce point sera donc l'ombre de F: menons la droite *lh*, cette ligne sera la portion d'ombre relevée dans le plan vertical *jk*, ou bien cette portion d'ombre sera l'intersection du triangle rectangle C*cg*, avec le plan *jk*, ou bien encore celle du même plan avec le triangle rectangle d'ombre F*fg*. Par conséquent, pour trouver cette ombre, nous n'avons, comme dans l'opération précédente, qu'à renverser le triangle C*cg*, sur le plan horizontal, ce qui nous donnera le triangle C″*cg*, dans lequel se trouvera aussi la droite *f*F, en *f*F″, ainsi que l'intersection indéfinie *hj*, du plan *jk*; nous n'avons plus qu'à mener le rayon C″F″, qui rencontrera le plan vertical en *l*, et la droite *hl″* sera l'ombre cherchée que nous porterons de *h* en *l*. Cette droite *hl″* ne nous paraît pas égale à *hl*, à cause du raccourci produit par la perspective de la figure; mais cet inconvénient disparaîtra en opérant, sur la figure 2, directement par le rayon de

lumière, ou indirectement par ses projections; et comme cette opération n'est pas plus difficile que la précédente, nous la laisserons faire au lecteur. D'ailleurs elle est indiquée suffisamment dans la figure, pour ne laisser aucune difficulté.

PROBLÈME 2. *Étant données les projections de la lumière, ainsi que celles d'une droite inclinée au plan horizontal, trouver l'Ombre de cette droite, sur ce plan* (fig. 1 et 2, pl. 2).

Soient A*b*, a*b'*, les projections de la droite donnée, et *d*, d*d'*, celles de la lumière. Considérons d'abord la figure 1, où ce problème est résolu. Nous voyons premièrement, qu'un rayon émanant du point lumineux D, et passant par l'extrémité B de la droite donnée, projettera l'ombre de ce point dans le plan horizontal en *e*. Mais comme l'extrémité A touche le plan horizontal, son ombre sera donc à ce même point; et comme l'ombre d'une droite sur un plan est elle-même une droite qui est nécessairement déterminée par deux de ces points, la droite A*e* sera donc l'ombre cherchée. Nous voyons donc que ce problème n'est pas plus difficile que le précédent, car il ne consiste qu'à chercher l'ombre de la verticale *occulte* B*b*, ou la hauteur de B, au-dessus du plan horizontal. Cette ombre serait *be*, dont le seul point *e* nous est nécessaire; il ne nous reste donc plus qu'à mener la droite A*e*, qui sera l'ombre cherchée. Nous trouverons cette ombre par les mêmes moyens que ceux que nous avons déjà vus dans le premier problème, c'est-à-dire en couchant la lumière et la droite dans le plan horizontal, ou bien en nous servant de leurs projections. L'inspection des figures est suffisante pour cela.

PROBLÈME 3. *Étant données les projections d'une droite inclinée à deux plans, trouver l'Ombre de cette droite sur ces deux plans* (mêmes fig.).

Avec un peu d'attention, nous verrons que ce problème n'est pas plus difficile à résoudre que les précédens. Soient F*g*, *fg'*,

les projections de la droite, et d, dd', celles de la lumière. Nous voyons d'abord (fig. 1), qu'un rayon lumineux passant par G, irait projeter l'ombre de ce point dans le plan horizontal en h (s'il n'y avait aucun obstacle), par ce point et par F, menons une droite Fh, qui serait l'ombre de FG, inclinée au plan horizontal, comme dans l'exemple précédent. Mais nous avons ici un plan vertical JK, qui intercepte le rayon en G, et l'ombre en i; et comme l'extrémité G de la droite touche ce plan vertical, l'ombre de G sera donc à ce même point comme l'ombre de F est à ce point sur le plan horizontal; menons donc la droite Gi, et nous aurons l'ombre cherchée Fi, iG. L'application de cette opération à la figure 2 ne présentant aucune difficulté, nous nous dispenserons de la décrire. Il peut cependant se présenter une difficulté que nous ferons bien de prévoir, parce qu'elle peut se rencontrer fréquemment.

Si l'extrémité G, ou g, g' (fig. 2), d'une droite inclinée était plus élevée qu'elle ne l'est dans cet exemple, le rayon lumineux rencontrerait le plan à une distance trop grande pour notre papier, et même si ce point était seulement aussi élevé que celui de la lumière, le rayon alors serait parallèle au plan horizontal, et par conséquent ne pourrait jamais le rencontrer. Dans ce cas, nous prendrons un point quelconque de la droite, tel que l, que nous coucherons dans le plan horizontal en lL, parallèlement à la lumière dD; nous menerons par l et par d, projection horizontale de la lumière, une droite indéfinie, ensuite par D et par L, nous menerons un rayon prolongé qui coupera la droite dl, en un point m, qui sera un des points de l'ombre cherchée; par ce point et par F, nous menerons une droite prolongée jusqu'au plan vertical JK, ce qui nous donnera le point i, de même que par l'opération précédente. Ou bien, si nous voulons opérer par les projections de la droite et de la lumière, nous menerons le rayon $d'l'$, jusqu'à la rencontre de la commune section des deux

plans de projection en m; de ce point abaissons la perpendiculaire m*m*, qui coupera le prolongement de *dl*, en *m*, qui sera le point cherché.

PROBLÈME 4. *Les projections d'une droite étant données, ainsi que celles d'un plan incliné aux plans de projection, trouver la portion d'Ombre interceptée par ce plan* (fig. 1 et 2, pl. 3).

Soient AB la section commune des deux plans; *c*, c*c'* les projections de la lumière; *d*, d*d'*, celles de la droite; EFG, celles du plan incliné au plan horizontal. Ce problème n'est pas plus difficile à résoudre que le précédent, car nous voyons d'abord dans la figure 2, 1° que sans l'obstacle du plan EG, l'ombre de la droite *d*D, serait projetée dans le plan horizontal en *dh*; 2° que le triangle *hc*C peut être considéré comme étant un plan indéfini qui coupe le plan EG, selon la droite IJ; 3° que l'inclinaison de cette droite est la même que celle du plan EG sur le plan horizontal; 4° que le rayon C*h* est intercepté par le plan EG, au point K; que ce point est à l'intersection du rayon et de la droite *i*J; que cette ligne, ainsi que la droite donnée *d*D, et la lumière, se trouvent dans le plan du triangle rectangle *hc*C : il ne nous reste donc plus qu'à coucher le plan de ce triangle, ainsi que les lignes qu'il contient, dans le plan horizontal en *hc*C'; ce que nous allons effectuer de cette manière (fig. 1).

Si nous voulons opérer par le rayon lui-même, menons une droite indéfinie *cd*, qui sera (ainsi que nous le savons) la trace d'un plan vertical passant par la lumière et par la droite donnée. Ensuite, des points *c*, *d*, abaissons à cette même droite des perpendiculaires sur lesquelles nous porterons la hauteur de la lumière de *c* en C, et la hauteur de la droite donnée de *d* en D. De *j*, abaissons aussi une perpendiculaire à *hc*, sur laquelle nous porterons la longueur gG (qui est la hauteur de *j*, au-dessus du plan horizontal) de *j* en J. De ce dernier point, menons la droite JI,

qui sera l'intersection du plan incliné. Par C et par D, menons un rayon qui coupera IJ en K, qui sera le point cherché. De ce point abaissons sur *hc*, une perpendiculaire K*k*, dont l'extrémité *k* sera la projection horizontale de K. Donc la longueur de l'ombre sur le plan incliné EG, sera IK, et sa projection horizontale I*k*. Par conséquent, l'ombre entière de la droite *d*D sera *d*IK, ou *d*I*k*. Si nous voulons opérer par les projections de la lumière, menons la droite indéfinie *cd*; par *c'* et par *d'*, projections de la lumière et de la droite donnée, menons un rayon qui coupera FG, projection du plan incliné en un point *k'*; de ce point abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de *cd*, ce qui nous donnera également le point *k*. Nous opérerons de la même manière à l'égard du plan Lm, P*m'*, qui est incliné en sens contraire du précédent, et de la droite NO, n*o'*. Le lecteur fera très bien de s'exercer à varier ces différens problèmes de plusieurs manières, parce qu'il n'est pas possible que nous puissions insérer dans cet Ouvrage tous les cas qui peuvent se présenter, et qui d'ailleurs, peuvent tous aussi se résoudre par les mêmes principes.

Afin de ne pas répéter les différens problèmes des ombres des corps solides produites par une lumière telle que celle-ci, dont les rayons sont sensiblement divergens, nous allons passer de suite à la construction des ombres formées par une lumière dont les rayons sont censés parallèles entre eux, tels que sont les rayons du soleil. D'ailleurs, ce sont les mêmes principes que ceux que nous venons de voir, et nous n'aurons aucune difficulté à les appliquer à une lumière quelconque.

Problème 5. *De la construction des Ombres, lorsque les rayons lumineux sont parallèles entre eux.*

Dans les opérations que nous venons de faire, nous avons supposé la distance de la lumière à l'objet éclairé, comme étant

connue, parce que cela nous a fait concevoir plus facilement les premières constructions des ombres, qui sans cela, auraient pu nous paraître un peu abstraites. Si, par exemple, nous eussions voulu d'abord opérer par la lumière du soleil, il nous eût été impossible de déterminer sur les plans de projection la position de cet astre relativement aux différens corps éclairés. Voyons comment nous pourrons y suppléer (fig. 1, pl. 4).

Soient *c*, cc′, les projections d'une droite; *e*, ee′, celles de la lumière. Cette lumière étant supposée couchée dans le plan horizontal, E sera le point lumineux; Ef, le rayon; *ef*, *e′f*, les projections de ce rayon; enfin *cf* sera l'ombre de la droite donnée. Concevons le rayon fE; prolongé indéfiniment vers z, ses projections seront aussi les prolongemens indéfinis de f*e*, f*e′*, vers *z*, *z′*. Concevons maintenant le point lumineux E, placé successivement en G, H, etc., et toujours sur le prolongement du rayon; les projections de ce point seront nécessairement aussi sur les prolongemens des projections de ce même rayon, en *gh*, *g′h′*., etc. Il est évident que cela ne changera rien à la direction ni aux dimensions de l'ombre *c*f. D'après cela, nous pouvons donc à la rigueur nous passer de la position du corps ou point lumineux, il nous suffira d'avoir les projections d'un seul rayon. Ainsi, dorénavant, nous pourrons, sans aucun inconvénient, considérer le lieu de la lumière comme étant éloigné de nous d'une distance indéfinie quelconque. Ce que nous allons achever d'éclaircir par des exemples.

Problème 6. *Les projections d'un rayon solaire étant données, ainsi que celles d'une droite, déterminer l'ombre de cette droite sur le plan horizontal* (même figure).

Soient *z*f, *z′*f, les projections du rayon, et *i*, i*i′*, celles de la droite donnée. Puisque nous considérons les rayons solaires comme étant sensiblement parallèles entre eux, leurs projections seront nécessairement aussi parallèles entre elles. Par conséquent, si

nous menons par i, une droite kl, parallèle à fz, et par i', une autre droite parallèle à fz', ces deux lignes seront les traces d'un plan passant par la lumière, quelle que soit sa distance par rapport à nous. Nous pouvons aussi considérer ces lignes comme étant les projections d'un rayon lumineux indéfini, mais dont nous pouvons déterminer la direction et l'angle qu'il fait avec les plans de projection, ce que nous avons vu au commencement de la Géométrie descriptive. Comme la droite donnée est égale à la droite cC, l'ombre ik, sera égale à l'ombre cf. Si nous eussions voulu opérer directement par le rayon, nous voyons bien ce qu'il aurait fallu faire, et nous aurions eu Lk, pour la direction du rayon, et l'angle Lkl, pour la mesure de l'inclinaison de ce même rayon avec le plan horizontal. Les projections d'un rayon solaire suffisent donc pour déterminer les ombres des différens corps. Comme les corps peuvent être éclairés d'une infinité de manières différentes, les artistes peuvent choisir celle qui convient le mieux à l'objet qu'ils se proposent. Mais les anciens ingénieurs, architectes et dessinateurs sont généralement convenus d'en adopter une qui fût constamment la même, ce qui leur a paru plus avantageux à plusieurs égards. Malheureusement leurs descendans n'ayant pas étudié suffisamment cette partie, et par conséquent n'ayant pas compris le principe adopté dans l'origine, sont tombés, pour la plupart, dans une erreur grossière à ce sujet, en confondant le rayon avec ses projections. Prenant particulièrement la projection verticale pour le rayon lui-même, et l'employant indifféremment dans les deux plans, il en résultait un contre-sens dans les projections horizontales et verticales des ombres. Cette méthode vicieuse a été suivie généralement et très long-temps par toutes les Ecoles, excepté par celle du Génie, à Mézière, dirigée par Monge, et depuis, par l'École Polytechnique.

Selon cette convention dont nous parlons, la position de la lumière doit être telle, que chacune de ses projections fasse un angle

de 45° avec la section commune des deux plans de projection, ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas où le rayon est dans la direction de la diagonale d'un cube, dont une des faces est parallèle au plan vertical, ce que nous allons tâcher de faire comprendre par un exemple.

Soit AB (fig. 1 *bis*) un plan horizontal sur lequel est posé un cube. Considérons dans ce cube les faces *c*d, d*c'*, comme étant les deux plans de projection, horizontal et vertical. Si nous menons de l'angle C, à l'angle opposé d, une droite Cd, cette ligne sera l'axe ou la diagonale du cube. Supposons que cette diagonale soit un rayon lumineux prolongé indéfiniment vers E, ou jusqu'au soleil; pour avoir la projection horizontale de ce rayon, de l'un de ses points quelconque, tel que C, abaissons une perpendiculaire sur le plan horizontal AB, nous aurons *c* pour la projection de C; et comme l'extrémité d du rayon touche le plan AB, la droite *c*d sera donc la projection horizontale de Cd, portion du rayon, ou celle de la diagonale du cube. Observons que la droite *c*d, est la diagonale de la face du cube qui pose sur le plan AB, et qu'elle divise l'angle droit *f*dc en deux parties égales, et fait par conséquent un angle de 45° avec le côté cd; or, ce côté étant la section commune des deux faces *c*d, d*c'*, ou plans de projection, la projection horizontale de la diagonale du cube fait donc un angle de 45° avec la commune section des deux plans de projection, ou bien avec le plan vertical. Si nous prolongeons indéfiniment vers A, cette droite cd, nous aurons la projection indéfinie du rayon dE. Maintenant pour avoir la projection verticale de ce même rayon, abaissons du point C une perpendiculaire sur le plan vertical, nous aurons *c'* pour la projection verticale de C; et comme d touche le plan vertical, la droite *c'*d sera la projection cherchée. Cette ligne est aussi la diagonale d'un carré, et fait par conséquent un angle de 45° avec le côté cd, ou avec la commune section des deux plans. Donc, *les projections d'un rayon lumineux*

qui est dans la direction de la diagonale d'un cube, dont une des faces est parallèle au plan vertical, font un angle de 45° avec la section commune des deux plans de projection.

Considérons maintenant l'arête *c*C comme étant une droite verticale dont nous voulons avoir l'ombre sur le plan horizontal, d'après la direction du rayon que nous venons d'établir. Sans faire aucune opération, nous voyons d'abord que *c*d est l'ombre demandée, puisque le rayon projette l'ombre de C en d, et que l'autre extrémité de cette ombre est le point *c*. Nous devons encore voir que si nous eussions opéré par les projections du rayon, nous aurions obtenu le même résultat, car c*c'* peut être considérée comme étant la projection verticale de cC, et nous voyons que la projection verticale du rayon Eb, prolongée jusqu'au plan horizontal, nous donnera également le point b. Observons que la droite *c*C étant le côté ou l'arête d'un cube, est aussi le côté d'un carré égal à celui dont *c*d est la diagonale; or, cette diagonale étant l'ombre de la droite *c*C, nous pouvons en conclure que *lorsque les projections de la lumière font un angle de 45° avec la commune section des deux plans de projection, la longueur de l'ombre d'une droite perpendiculaire à l'un des deux plans est égale à la diagonale du carré de cette même droite,* car nous pouvons aussi considérer *c'*d comme étant l'ombre de la droite *c'*C, qui est perpendiculaire au plan vertical.

Puisque les rayons solaires sont censés parallèles entre eux, ainsi que leurs projections le sont entre elles, menons par les points *f*, d, c, des parallèles à *c*d, et par les points supérieurs F, D, *c'*, menons des rayons parallèlement à Ed, nous aurons les points d'ombre *g*, *h*, *i*, sur le plan horizontal, et par conséquent les ombres de chacune de ces droites. Joignons les points *g*, *h*, *i*, par des droites parallèles aux lignes FD, D*c'*, nous aurons l'ombre totale du cube sur le plan horizontal. Il suit de

ce qui vient d'être dit, que nous ne devons avoir aucune difficulté à effectuer sur la figure 2, les opérations que nous n'avons pu qu'indiquer sur la figure 1 *bis*.

Nous allons opérer seulement sur un seul point du cube, et nous répéterons successivement pour chacun des autres. Soient *c*h, h*e'* les projections de la lumière, faisant un angle de 45° avec la section commune des deux plans; si nous voulons opérer par le rayon, il nous faut d'abord le chercher, ce qui se réduit (ainsi que nous l'avons vu) à chercher la droite originale qui est censée avoir donné ces projections. D'un point quelconque, tel que *c*, élevons sur *c*h une perpendiculaire *c*C que nous ferons égale à cc'. Portons cette hauteur *c*C sur *c*h, de *c* en *x*, et la droite C*x* (qui est la diagonale du carré), de *c* en *d*; menons la droite indéfinie C*d*, qui sera la diagonale du cube, ou le rayon cherché; et l'angle C*dc*, qui est d'environ 35° 16', sera la mesure de l'inclinaison du rayon sur le plan horizontal, et non pas 45°, comme le croient communément ceux qui prennent la projection verticale du rayon pour le rayon lui-même; car si ce rayon était incliné de 45° sur le plan horizontal, comme le serait C*x*, dont la longueur égalerait la hauteur de la droite, ou serait le côté du carré de cette ligne, tandis que *cd*, ombre de cette même ligne, est la diagonale du carré de sa hauteur. Nous voyons de plus que si le rayon C*x* faisait un angle de 45° avec le plan horizontal, la projection verticale *c'*x de ce rayon ne pourrait pas faire 45° avec AB. Il est important de ne pas confondre le rayon avec ses projections. L'ombre de *d*D, ou d*d'*, sera *d*h, et ainsi des autres.

Cette direction de la lumière, qui est à la fois la plus avantageuse et la plus commode pour les dessins en projections horizontales et verticales (ou *plans* et *élévations*), ne conviendrait point aux dessins en perspective, parce que les deux plans de projection se trouvent éclairés sous le même angle, et par con-

séquent ne pourraient être distingués l'un de l'autre ; ce qui est un inconvénient qu'il convient d'éviter. Il faut alors élever davantage la lumière, afin que le plan horizontal soit plus éclairé que le plan vertical, et ainsi que le font ordinairement la plupart des peintres. D'ailleurs, quelle que soit la direction de la lumière, la manière d'opérer est absolument la même. Comme les ombres de tous les corps terminés par des surfaces planes, ne sont pas plus difficiles à trouver que celles du cube, et qu'il est inutile de multiplier les figures sans nécessité, nous passerons de suite aux ombres des corps ronds, ou terminés par des surfaces courbes. Nous commencerons par le cercle.

PROBLÈME 7. *Les projections d'un Cercle et celles de la Lumière étant données, trouver l'ombre de ce cercle* (fig. 1, pl. 5).

Soient *cd*, d*c'* les projections de la lumière, et *efghi, g'h'i'j'k'*, celles d'un cercle. Prenons sur la circonférence de ce cercle autant de points que nous le jugerons à propos ; par chacun de ces points, menons autant de droites indéfinies parallèles à *cd* ; ces lignes seront les projections horizontales d'autant de rayons lumineux. Par chacun des points correspondans de la projection verticale, menons des droites parallèles à *c'*d, qui seront les projections verticales de ces mêmes rayons, ainsi que nous l'avons vu précédemment. Par chacun des points d'intersection de ces dernières lignes avec AB, abaissons autant de perpendiculaires qui couperont les projections horizontales de la lumière, et chaque point d'intersection sera l'ombre du point correspondant. Par exemple, l'ombre de *h* sera *m*, celle de *l* sera *n*, etc. Ainsi, l'ombre circulaire *nopq*, etc., sera l'ombre du cercle donné. Cette ombre est circulaire, parce que les rayons qui enveloppent la circonférence du cercle forment un cylindre dont l'axe est oblique, lequel cylindre est coupé parallèlement à sa base, par le

plan horizontal : d'où il suit que chaque fois que ce cas se rencontrera, nous pourrons abréger l'opération de beaucoup; car il nous suffira de chercher seulement l'ombre du centre u, qui sera v; et avec un rayon égal à celui du cercle donné, nous décrirons l'ombre circulaire cherchée.

Il s'agit maintenant de trouver l'ombre du cercle donné sur le plan vertical (fig. 2). Ainsi que dans l'exemple précédent, par des points pris arbitrairement sur la circonférence du cercle, nous ferons passer les projections horizontales de la lumière jusqu'à la rencontre de AB; de chacun des points d'intersection avec cette ligne, nous élèverons des perpendiculaires indéfinies. Ensuite, de chacun des points verticaux $g'h'i'j'k'$, etc., nous mènerons les projections verticales de la lumière; et chacun des points d'intersection avec les perpendiculaires correspondantes, sera un des points de l'ombre cherchée. Cette ombre sera une ellipse parce que le cylindre donné par les rayons sera coupé obliquement à sa base par le plan vertical.

L'opération relative à la figure 3 ne présente pas plus de difficultés que les précédentes. Il s'agit de trouver sur le plan horizontal, l'ombre d'un cercle parallèle au plan vertical.

Dans la figure 4, le cercle donné est perpendiculaire aux deux plans de projections : par conséquent, nous pouvons connaître les principaux points tels que c, d, e, e, f', e'; nous pouvons donc trouver facilement les ombres de ces points, qui seront e, f, g, h, i; mais en retranchant le centre f, il ne nous en restera que quatre à la circonférence de l'ellipse, ce qui ne suffit pas pour tracer cette courbe. Il nous faudra donc prendre d'autres points intermédiaires tels que j, k, etc., sur la projection horizontale du cercle; mais nous serons arrêtés parce que nous ne connaissons pas les hauteurs verticales de ces points; il nous faudra donc nécessairement coucher le cercle dans le plan horizontal, et élever les perpendiculaires jJ, kK, qui seront les hau-

teurs cherchées; de même les points *l*, *m*, seront élevés dans le plan vertical de e en *l'*, qui est la hauteur de *kl* ou *jm*; nous pourrons alors terminer l'opération sans obstacle.

Nota : ayant trouvé les deux diamètres conjugués *eg*, *hi*, qui se coupent en *f*, nous aurions pu chercher les deux axes de cette ellipse par le moyen que nous avons vu dans la Géométrie descriptive; mais cette opération étant plus longue que celle-ci, nous ferons bien de nous en dispenser.

La figure 5 nous présente le même problème que le précédent; seulement l'ombre est portée également sur les deux plans de projection. Comme il n'y a aucune difficulté, nous nous dispenserons de décrire l'opération.

Nous allons chercher l'ombre d'un cercle, posé dans le plan de la lumière.

Soient (fig. 1, pl. 6) *cd*, *c'd'*, les projections du cercle, et *e*f, f*e'*, celles de la lumière. Menons par le cercle *cd*, une droite indéfinie *cg*, qui sera la trace horizontale d'un plan passant par le rayon. Menons à l'ellipse, projection verticale du cercle, deux tangentes parallèlement à *e'*f, prolongées jusqu'à AB. Des points d'intersection j, k, abaissons sur AB des perpendiculaires qui couperont *cg* en *l*, *g*; ces points détermineront la longueur *lg* de l'ombre cherchée. Mais, comme dans la suite nous aurons besoin dans plus d'une occasion de connaître exactement la position des points de tangence *h'i'*, ce qui est un peu plus difficile sur l'ellipse que sur le cercle, nous allons les chercher directement sur ce dernier. Abaissons le cercle dans le plan horizontal, et menons dans la direction du rayon les tangentes M*g*, N*l*, qui nous donneront les points cherchés IH; en abaissant de ces points des perpendiculaires sur *cg*, nous aurons leurs projections horizontales *h*, *i*, et par suite *h'i'* qui seront plus exactement déterminés. Nous ne devons pas négliger d'observer que, par cette seconde opération, nous aurions pu facilement trouver d'abord l'ombre *l*, *g*, sans

avoir besoin de la projection verticale du cercle; ce qui abrège beaucoup le travail.

Nous nous proposons, figure 6, pl. 5, de trouver l'ombre d'un cercle dont la projection horizontale *ab* est perpendiculaire à la trace *cd* du plan passant par la lumière. D'après ce que nous avons vu dans l'exemple précédent, nous pouvons résoudre ce problème d'une manière facile et très abrégée. Nous savons que lorsque le rayon de lumière est dans la direction de la diagonale d'un cube, la longueur de l'ombre d'une droite dans le plan horizontal, est égale à la diagonale du carré de sa hauteur: d'après cela prenons *ea* ou *eb*, que nous porterons sur une perpendiculaire quelconque de *e* en *f*, et nous prendrons *fa* ou *fd*, que nous porterons de *e* en *g* et de *g* en *h*. Nous aurons *eh* pour la longueur de l'ombre du diamètre vertical du cercle. Ensuite, par *g* menons de part et d'autre une perpendiculaire à *eh*, sur laquelle nous porterons le rayon du cercle de *g* en *i* et de *g* en *j*; la droite *ij* sera l'ombre du diamètre horizontal de ce même cercle. Nous aurons donc les deux axes d'une ellipse que nous pouvons terminer avec une règle de papier.

Problème 8. *Trouver sur une circonférence de cercle, les points de tangence des plans passans par la lumière, lorsque le cercle donné n'est pas dans le plan de cette même lumière.*

Nous avons déjà résolu ce problème (fig. 1, pl. 6), qui ne présentait aucune difficulté, parce que le cercle était dans le même plan que la lumière, et qu'il n'y avait qu'à le coucher dans le plan horizontal, puis mener un rayon tangent à ce cercle. Mais dans le cas qui se présente, nous n'avons pas le même avantage, puisque ces deux plans diffèrent de position; nous devons donc tâcher de les ramener à un seul et même plan, ou à deux plans parallèles entre eux; ce que nous pouvons faire avec un peu d'attention (fig. 2, pl. 6).

Soient *c*d, d*c*′, les projections de la lumière; *ef*, *e′f*′, celles du cercle donné. (Nous supposerons l'ombre de ce cercle trouvée, par les moyens que nous connaissons.) Prolongeons indéfiniment de part ou d'autre, le plan *ef* du cercle vers *g*, et considérons *fg* comme étant la commune section de deux plans de projection. Prenons sur *c*d un point quelconque *h*, duquel nous élèverons une perpendiculaire *h*H, et ayant déterminé le rayon H*i*, nous aurons le triangle rectangle *ih*H, dont *hi* sera la projection horizontale. Cherchons maintenant la projection de ce triangle sur la droite *fg*, ce qui doit se faire (ainsi que nous le savons) en abaissant sur cette ligne des perpendiculaires de chacun des points *h*, *i*; il est évident que le point *i*, se trouvant par hasard sur *fg*, sera lui-même sa projection, et h sera celle de *h*; h*i* sera donc la projection horizontale du triangle *ih*H. Le point original dont h est la projection, sera donc élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur *h*H, du triangle rectangle *ih*H; par conséquent nous n'avons qu'à porter cette hauteur de h en H′, et à mener l'hypoténuse H′*i*, qui sera le rayon H*i*, ramené dans le plan du cercle *ef* ou *fg*; car le triangle rectangle *i*hH′, étant conçu relevé sur sa base h*i*, sera absolument dans le plan *fg* ou dans celui du cercle. Il ne nous reste donc plus qu'à mener au cercle deux tangentes parallèles à H′*i*′, ce qui nous donnera les points cherchés J, K, et dont les projections seront *j*, *k*, *j*′*k*′, ainsi que leur ombre sur la circonférence de l'ellipse en *l*, *m*. Nous verrons par la suite combien la connaissance de ce problème évite de travail, particulièrement dans la recherche de l'ombre du *tore* ou *cylindre annulaire*.

Nous nous sommes un peu étendus sur l'ombre du plan circulaire, parce que ce problème contient à peu près toutes les difficultés qui peuvent se rencontrer dans la construction des ombres des différens plans; par cette raison nous allons aussi construire l'ombre d'un cylindre dans les mêmes positions que celles des cercles

que nous venons de voir, ainsi que par les mêmes projections de la lumière.

Problème 9. *Les projections de la Lumière, et celles d'un Cylindre étant données, trouver l'ombre de ce cylindre* (fig. 3).

Cette opération se réduit à trouver l'ombre du centre *u*, du cercle supérieur, qui sera *v*; de ce point et d'un rayon *ug*, nous décrirons un cercle auquel nous mènerons les tangentes *fp*, *js*, aux deux cercles, et l'ombre du cylindre sur le plan horizontal sera déterminé. Nous devons facilement voir que *fp*, *js*, sont les ombres des droites *ff'*, *jj'*, qui sont les lignes de tangence des plans verticaux 1*fp*, 2*js*, passans par la lumière, et qui touchent le cylindre en *f*, *j*, sur toute sa hauteur. Nous devons voir aussi que la moitié *flj* du cylindre doit être ombrée, et l'autre moitié *fhj* éclairée; il s'agit maintenant de savoir si cette partie est également éclairée sur toute sa surface. Observons que le plan 3*h* rencontre perpendiculairement la surface du cylindre; cette partie sera donc plus claire que celles qui sont rencontrées par les plans 4*x*, 5*g*, 5*i*, etc., toujours plus obliquement à mesure qu'ils s'éloignent de *h*; par conséquent la lumière doit diminuer graduellement d'intensité jusqu'aux points *f*, *j*, où l'ombre commence, et dont la partie *jk* est seulement visible dans la projection verticale en *jk'*. Ainsi que nous le voyons dans la figure ombrée, cette partie *jk*, ou *jk'*, diminue aussi d'intensité en s'éclaircissant toujours de *j* vers *k*, parce que la lumière réfléchie suit la même marche que la lumière directe, ainsi que nous l'avons vu.

La figure 4 représente un cylindre dont la position est analogue à celle du cercle de la figure 5, pl. 5, et se construit de la même manière que cette figure.

La figure 5 est analogue à la figure 6, pl. 5, et par conséquent

se construit de même. Nous observerons seulement que la tangente $j'z$ doit être considérée comme étant la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical passant par le rayon lumineux, et qui est tangent au cylindre selon la droite jj; par conséquent l'ombre de cette ligne sera dans le plan horizontal zy, pour la partie zj, et dans le plan vertical zj', pour l'autre partie zj. Il en sera de même à l'égard de la tangente $f'x$. Nous invitons nos lecteurs à chercher l'ombre de ce même cylindre, suffisamment éloigné du plan vertical pour que son ombre soit contenue entièrement dans le plan horizontal, ce qu'ils peuvent aisément faire.

Fig. 1, pl. 7. Nous chercherons d'abord l'ombre des deux bases du cylindre, de la même manière que nous l'avons fait pour le cercle (fig. 4, pl. 5), ensuite nous mènerons deux tangentes à ces ellipses, et nous aurons l'ombre portée par le cylindre sur le plan horizontal. Mais cela n'est pas suffisant, il nous faut encore trouver, sur les deux projections du cylindre, les lignes de tangence des plans de la lumière, ce que nous avons déjà fait (fig. 2, pl. 6), c'est-à-dire en ramenant le rayon lumineux dans le plan du cercle, ce que nous ferons ainsi : par un point quelconque a, pris sur la projection de la lumière ab, élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons à volonté un point A; portons la hauteur aA, de a en c, prenons Ac, diagonale du carré, et portons-la sur ab; de a en d, menons la droite Ad; cette ligne sera la diagonale du cube, le rayon, ou l'hypoténuse du triangle rectangle Aad; projetons ce triangle sur ef, plan prolongé du cercle : en abaissant sur cette ligne des points a,d, des perpendiculaires aa, dd, la droite ad sera la projection de ad, base du triangle; portons la hauteur aA de a en A', et menons A'd, qui sera la projection cherchée du rayon ramené dans le plan du cercle; menons parallèlement à ce rayon A'd, les tangentes Af, gh, nous aurons les points de tangence Ag cherchés; de ces points abaissons sur

la projection horizontale du cylindre, les droites *ik*, *lm*, qui seront les lignes de tangence ou les limites de l'ombre du cylindre en dessus et en dessous; enfin, portons les hauteurs *i*A, *lg*, sur la projection verticale, nous aurons les droites $i'k'$, $g'm'$, pour les limites de l'ombre en avant et en arrière dans la projection verticale. Nous n'avons pas cru inutile de répéter ici cette opération que nous avons déjà faite; observons que le rayon *no*, tombant perpendiculairement sur le cercle, ou profil du cylindre, nous indique le point, *o*, et l'endroit où le cylindre sera le plus éclairé: or, les droites obtenues par ce point, seront *lm*, pour la projection horizontale, et $i'k'$, pour la projection verticale; ces lignes seront donc les parties les plus lumineuses sur ces deux projections.

Figure 2. Lorsque nous aurons fait les deux portions d'ellipse, comme dans la figure 5, pl. 5, nous coucherons le cercle *xy* dans le plan horizontal, nous projetterons le rayon dans le plan de ce cercle, et nous mènerons les tangentes parallèlement à ce rayon; des points *a*, *b*, nous mènerons les droites a*c*, b*d*, qui seront les limites de l'ombre; de e, extrémité de la tangente *be*, nous mènerons la droite e*f*, tangente à l'ellipse, cette ligne sera l'ombre portée de la ligne de tangence du cylindre sur le plan horizontal. Enfin, couchons le cercle yz dans le plan vertical, ce cercle se trouvera dans le même plan que la projection verticale de la lumière; menons deux tangentes *gh*, *ik*, parallèlement à la projection du rayon; des points *g*, i, menons les droites *lm*, *no*, qui seront les limites de l'ombre sur le cylindre vertical; du point k, menons la droite k*p*, cette ligne sera l'ombre portée sur le plan vertical par la tangente *no*, et l'ombre totale du cylindre se trouvera terminée dans les deux plans.

Figure 3. Cette figure est analogue à la figure 1, pl. 6; elle se construit absolument de même, et ne doit nous présenter aucune difficulté. Par conséquent nous nous dispenserons d'en rien dire.

La figure 1, pl. 8, se construit comme la fig. 6, pl. 5. Nous observerons seulement que la base *kfl*, étant couchée dans le plan horizontal, et la lumière étant ramenée dans ce plan, ne peut être qu'une ligne droite telle que *ch*; par conséquent le point F, qui est à la partie supérieure du cylindre sera l'endroit qui recevra plus de lumière selon la droite *fe*, que toutes les autres parties qui ne sont pas sur cette ligne. K, L seront les points d'attouchement des plans lumineux tangens à la surface du cylindre, les projections de ces tangentes seront dans le plan horizontal, les droites *ka*, *lb*, et dans le plan vertical *k'a'*, *l'b'*; l'ombre de ces lignes dans le plan horizontal, sera *mi*, *nj*.

(Figure 2). Si nous avons bien entendu ce qui a été dit jusqu'ici, et particulièrement la figure 2, pl. 6, nous n'éprouverons aucune difficulté dans la construction de cette figure, dans laquelle nous croyons même nécessaire de supprimer les lettres, puisque cette opération est entièrement analogue à celle de la figure 2, que nous venons de citer. D'ailleurs, il convient de laisser quelque chose à l'intelligence du lecteur, qui doit beaucoup s'exercer.

Comme les figures ombrées ne sont ici que pour l'intelligence des constructions, nous avons jugé à propos de les réduire pour éviter une perte de place.

Problème 10. *Trouver l'Ombre de l'intérieur d'une surface cylindrique concave* (fig. 3, pl. 8).

Soient CDE, *ch'*, les projections d'un demi-cylindre concave. Par C, menons la projection horizontale de la lumière qui coupera la courbe en D; de ce point élevons une droite indéfinie perpendiculaire à AB; par *f'*, projection verticale du point supérieur du cylindre (élevé verticalement au-dessus de C), menons la projection verticale de la lumière, qui coupera la droite élevée du point D en *i'*, ce point d'intersection sera l'ombre de *f'* dans

l'intérieur du cylindre. Pour avoir un second point de cette ombre, menons à volonté par un point quelconque de la courbe, tel que j, une parallèle à CD, qui coupera cette même courbe en un point k; de ce point, élevons sur AB, une perpendiculaire indéfinie, et de j', projection verticale de j, menons une parallèle à $f'i'$, qui coupera la perpendiculaire en un point k', qui sera l'ombre de j'. Enfin, menons la projection horizontale de la lumière, de manière qu'elle soit tangente à la courbe en l : la projection verticale de ce point sera l'; ce point sera la naissance de l'ombre dans la cavité cylindrique. Par ces trois points (ou par un plus grand nombre), nous ferons passer une courbe qui sera l'ombre de la partie circulaire ljC ou $l'k'i'$; enfin, nous menerons la droite i'd, qui sera l'ombre de $f'm'$, portion de la droite f'c, et l'ombre de l'autre partie m'c, sera dans la projection horizontale en CD : l'ombre cherchée sera ainsi terminée.

Cherchons maintenant cette même ombre directement par le rayon lumineux. Considérons CD, comme étant la trace d'un plan coupant le cylindre; la section qui en résultera sera le rectangle DF; menons par F, un rayon qui coupera DG en i, ce point d'intersection sera l'ombre de F; portons la hauteur Di de d en i', et nous aurons le point cherché. Il en sera de même pour la section jk, qui nous donnera le point K, et la hauteur kK, sera égale à celle kk'; à l'égard du point de tangence l, il ne nous donnera pour section que la seule droite lL; par conséquent le point L, sera lui-même le lieu de l'ombre, ou sa naissance en l' dans la projection verticale. Nous croyons qu'il est à peu près inutile de dire qu'un rayon qui passerait par le centre n, irait frapper perpendiculairement l'intérieur de la courbe au point o, et que par conséquent cette partie sera plus éclairée que les autres, ce qui, dans la projection verticale, répond à la droite oo'.

La fig. 1, pl. 9 est l'inverse de la précédente, et ne présente aucune difficulté.

(Fig 2). Cette figure se rapporte au cas de la fig. 2, pl. 6 et fig. 2, pl. 8, dans lesquelles le plan de la courbe n'est pas dans la même direction que celui de la lumière; il convient donc auparavant de les faire coïncider, et alors il n'y aura aucune difficulté. L'inspection seule de cette figure étant suffisante, nous n'en dirons pas davantage.

Problème 11 (fig. 3 et 3 bis). *Trouver l'Ombre d'un Cône sur le plan horizontal.*

Nous avons vu précédemment que l'ombre sur la surface d'un cylindre, ainsi que son ombre portée sur le plan horizontal, étaient déterminées par la ligne d'attouchement d'un plan passant par la lumière, et tangent à la surface de ce même cylindre; il en sera de même du cône dont il est question ici. Supposons le problème résolu (fig. 3 bis); concevons deux plans CDE, CFE, passant par la lumière, par les limites de l'ombre portée, et par celles de l'ombre du cône : ces plans seront tangens à la surface du cône, et par conséquent au cercle de sa base, selon les droites DC, FC; et la ligne de leur intersection, ou l'arête CE, sera dans la direction du rayon lumineux passant par le sommet C, et projetant l'ombre de ce point sur le plan horizontal en E; les projections horizontales de ces plans seront évidemment les triangles *c*DE, *c*FE. Il suit de ce qui vient d'être dit, que pour résoudre le problème qui nous occupe, il suffit d'avoir seulement l'ombre du sommet ou le point E, ce qui n'est pas difficile, et que nous pouvons trouver directement par le rayon CE (fig. 3), ou par sa projection verticale *c*'e; de ce point nous menerons deux tangentes ED, EF, au cercle de la base, ainsi que les rayons D*c*, F*c*, qui seront les limites de l'ombre sur la

surface du cône, et les tangentes seront les limites de l'ombre portée sur le plan horizontal. Le reste peut se concevoir facilement sans plus d'explication.

(Fig. 1 et bis, pl. 10). Dans le problème que nous venons de résoudre, le cône est posé sur sa base dans le plan horizontal; dans celui-ci nous le supposerons posé sur son sommet. Ce problème exige un peu d'attention, non pour ses difficultés, car il est aussi facile que le précédent, mais pour le bien entendre, parce que nous ne devons pas nous contenter d'une construction purement mécanique; nous devons d'abord chercher le point *d*, ombre du centre C, de la base du cône, ce que nous pouvons faire très facilement, soit par le rayon, soit par sa projection verticale, ainsi que nous le voyons dans cette figure. De ce point *d*, comme centre, et avec un rayon égal à celui de la base du cône, nous décrirons un cercle, et du sommet C, nous menerons les tangentes C*e*, C*f*, et l'ombre portée par le cône sur le plan horizontal, sera déterminée; il s'agit maintenant de trouver les limites de l'ombre du cône, ou la tangente qui indique la séparation de la partie éclairée et de celle ombrée, ce que nous pouvons faire de plusieurs manières : 1° en menant par le point de tangeance *e*, une parallèle à *cd*, qui coupera la circonférence de la base en *g*; de ce point menons le rayon *g*C, et nous aurons la projection horizontale de la tangente cherchée; 2° du centre C, élevons une perpendiculaire sur C*e*, et le rayon C*g*, sera la ligne cherchée; 3° prenons sur le prolongement de *d*C, un point *h*, éloigné du centre C, d'une distance égale à C*d*; de *h* menons à la base du cône les tangentes *hg*, *hi*, ce qui nous donnera les mêmes points *g*, *i*.

(Fig. 1 bis). Si nous concevons deux plans *e*H, *f*H, passant par les limites rectilignes de l'ombre portée, ces plans seront tangens au cône selon les droites CG, CI, et s'entrecouperont suivant la droite CH: cette ligne d'intersection ou arête, fera

avec le plan horizontal, un angle HC*h*, égal à celui que fait le rayon lumineux, et par conséquent le point *h*, étant la projection de H (qui est élevé au-dessus du plan horizontal de la hauteur C*c*), sera éloigné de C, de la distance C*d*; car nous voyons qu'un rayon qui passerait par *c*, et qui projetterait l'ombre de ce point sur le plan horizontal en *d*, serait égal et parallèle à HC. Nous ferons bien d'étudier l'analogie de ces plans dans les deux figures, afin de mieux concevoir l'opération que nous venons de faire, ainsi que celles qui nous restent encore à voir.

Nous devons observer ici de quelle utilité sont les règles du tracé des ombres. Si l'on proposait à un artiste (qui ignorerait ses principes) de dessiner de tête, sans consulter la nature, deux cônes opposés par leur base, il est très probable que cet artiste déterminerait les ombres de ces cônes selon celles de la figure 2, c'est-à-dire qu'ayant déterminé l'ombre de l'un de ces cônes, le supérieur par exemple, selon la droite *ab*, il ne manquerait pas de faire immédiatement celle du cône inférieur de *b* en *c*, ce qui serait une grande faute, car elles doivent être (fig. 3), de *a* en *b*, et de *c* en *d*. De même si cet artiste avait à déterminer les ombres d'un cylindre terminé par deux cônes, il les ferait selon la figure 4, tandis qu'elles doivent être comme dans la figure 5.

S'il s'agissait de déterminer l'ombre dans l'intérieur d'un cône creux, comme dans l'exemple suivant (fig. 6). En terme de fortification on nomme *puits*, un trou conique fait à la surface du terrain, tel que nous le supposerons dans cet exemple; *ab*, est la projection horizontale de la lumière (la même que dans les exemples précédens). Concevons un plan vertical passant par cette ligne, et coupant le cône; renversons cette coupe dans le plan horizontal, nous aurons le triangle A*c*B; proposons-nous maintenant de chercher l'ombre du point *a*, portée dans l'intérieur du cône; par A, projection verticale de *a*, faisons passer un rayon

qui projettera l'ombre de ce point en D, sur le côté B*c*, du triangle AB*c*; ce côté B*c*, a pour projection horizontale la droite *cb*, par conséquent tous les points qui seront sur B*c*, correspondront à tous ceux de *bc*; nous n'avons donc qu'à abaisser une perpendiculaire de D sur *bc*, ce qui nous donnera *d*, pour le point cherché de l'ombre de *a*, dans l'intérieur du cône; ce premier point ne présente aucune difficulté, mais nous ne sommes pas encore à la fin. Prenons un autre point quelconque, tel que *e*; faisons passer par ce point un plan vertical *ef*, parallèle au premier ; il est évident que l'ombre de *e*, doit se trouver sur *ef*, comme celle de *a*, se trouve sur *ab* en *d*: il doit nous sembler d'abord, que cette seconde opération n'est pas plus difficile que l'autre; mais si nous observons que la première coupe par le centre, ou par le sommet du cône, est un triangle, et que dans celle-ci le plan *ef*, ne passant point par le sommet, la coupe verticale sera une hyperbole EGF, qu'il nous faudra construire à chaque point dont nous chercherons l'ombre; alors nous commencerons à voir que cette opération n'est pas aussi facile qu'elle nous avait paru d'abord. Ayant tracé cette hyperbole (selon les règles que nous avons vues dans la géométrie descriptive), nous menerons un rayon par E, qui projettera l'ombre de ce point dans l'hyperbole en H, et dont la projection horizontale sera *h*.

Cette manière de trouver ainsi l'ombre de chaque point, serait extrêmement longue, et exigerait un si grand nombre de lignes, qu'il y aurait nécessairement confusion; d'après cela, nous devons donc chercher un moyen plus simple et plus prompt. Prolongeons le plan AB de la base du cône, indéfiniment vers I; par le sommet *c*, menons le rayon lumineux *c*I; de I, abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de *ab*, ce qui nous donnera le point *i* (qui est analogue au point *h*, de la figure 1); de ce point menons les tangentes *ij*, *ik*, et les points *j*, *k*, seront à la naissance de l'ombre portée dans l'intérieur du cône par l'arc *jak*;

les deux points *j*, *k*, et le point *d*, seront donc trois points de l'ombre cherchée; mais ces trois points ne suffisent pas pour décrire la courbe de cette ombre ; prenons donc un autre point quelconque, tel que *e* (que nous supposerons n'être pas trouvé précédemment par le moyen de l'hyperbole); par *i*, et par le point donné *e*, menons la droite *iel*, cette ligne sera la trace d'un plan incliné que nous concevrons passer par le sommet *c*, du cône. Or, nous savons que toute coupe d'un cône par un plan qui passe par le sommet et par la base, est un triangle; menons donc les droites *lc*, *ec*, nous aurons le triangle *ecl*, pour projection horizontale de cette coupe, et le triangle E*c*L, pour la projection verticale de la même coupe. Il ne nous reste plus qu'à mener par E, un rayon qui portera l'ombre de ce point en H, sur le côté L*c* du triangle (nous voyons bien que ce point est le même que celui trouvé précédemment), ce qui nous donnera *h*, sur la projection horizontale *lc*.

De cette dernière opération, nous pouvons déduire un nouveau moyen de trouver ce point d'une manière très abrégée. Remarquons que ce point *h*, se trouve situé à l'intersection de *lc*, côté du triangle, et de *ef*, trace horizontale du plan vertical, qui contient ou forme l'hyperbole, par la section du cône, de même que H, se trouve à l'intersection de L*c*, et de l'hyperbole EGF. Par le point donné *e*, menons une droite *ef*, parallèle à *ab*, le point cherché doit se trouver sur cette ligne; par *i*, et par le même point *e*, menons la droite *iel*; de *l* menons *lc*, le point cherché doit aussi se trouver sur cette ligne : donc il sera à l'intersection *h*, et de cette manière, si simple et si expéditive, nous trouverons autant de points que nous en aurons besoin, et par tous ces points nous menerons la courbe qui sera l'ombre cherchée.

PROBLÈME 12. *Déterminer* 1° *l'Ombre sur la surface d'une Sphère;* 2° *l'Ombre portée par cette même sphère sur le plan horizontal* (fig. 1, pl. 11).

Considérons la droite *cd*, projection horizontale de la lumière, comme étant la trace d'un plan coupant vertical, et passant par le centre de la sphère; la section sera un grand cercle que nous coucherons dans le plan horizontal; ou bien, pour éviter la confusion des lignes, nous le projetterons verticalement sur la droite ab, en considérant cette ligne comme étant la commune section des deux plans de projection, et sur laquelle nous projetterons aussi le rayon lumineux, selon l'inclinaison de la diagonale du cube, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici; cela fait, nous menerons les rayons tangens au cercle, et des points e', f', nous abaisserons sur le plan horizontal les perpendiculaires $e'e$, $f'f$, ces nouveaux points seront les projections horizontales des premiers. L'ombre de e', sera portée sur ab en g, et celle de f', sera projetée sur la même ligne en d; par conséquent la longueur de l'ombre portée par le grand cercle $e'h'f'$ de la sphère, sera gd, sur ab, ou bien sa projection gd. Maintenant considérons ce grand cercle vertical, comme étant une sphère (ce qui ne change rien); il est évident que la droite $e'f'$, sera la limite des parties éclairées et ombrées, de cette même sphère, ainsi que la projection verticale d'un grand cercle incliné au plan horizontal. Le point h', extrémité d'un diamètre horizontal ainsi que son opposé ou *antipode*, auront chacun leur projection horizontale en h, i, et la droite hi, sera évidemment la projection horizontale du diamètre, dont h', est une des extrémités; les rayons qui passeront par h' et son opposé, projetteront les ombres de ces points en j, milieu de gd, les projections horizontales de l'ombre de ces points, seront j, k; ce qui nous donnera 1° les deux axes ef, hi, d'une ellipse qui sera la projection horizontale du cercle incliné, dont $e'h'f'$, est la projection verti-

cale, ou bien la projection horizontale des limites de l'ombre sur la surface de la sphère; 2° les deux axes *gd*, *jk*, d'une autre ellipse qui sera la coupe du cylindre formé par les rayons tangens à la surface de la sphère, par le plan horizontal, ou bien les limites de l'ombre portée par cette même sphère, sur le plan horizontal.

Nous pourrions tracer ces deux ellipses par le moyen de la petite règle de papier, et le problème serait résolu. Mais nous ne devons employer ce moyen que pour gagner du temps, et qu'après avoir bien entendu cette opération; par conséquent nous devons donc construire les contours de ces ellipses par plusieurs points pris à volonté sur *e'f'*, ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est ombrée. Dans cet exemple, nous n'opérerons que sur un seul point, puisque tous ceux dont nous pourrions avoir besoin se trouveront de la même manière. Soit le point *l'*, pris à volonté sur *e'f'*. Cherchons d'abord la projection horizontale de ce point, qui n'est autre chose que de rapporter sur une des projections de la sphère, un point donné sur l'autre projection, opération que nous avons déjà faite, et que cependant nous croyons nécessaire de rappeler ici. Abaissons d'abord de *l'*, sur le plan horizontal une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle doit se trouver le point cherché, ensuite menons par *l'*, une parallèle à a*b*, et considérons cette ligne comme étant la trace d'un plan coupant perpendiculaire au plan vertical; la section de la sphère par ce plan sera un cercle qui aura pour diamètre *n'o'*, et par conséquent *p'n'* ou *p'o'*, pour rayon. Prenons donc ce rayon, et portons-le dans la projection horizontale de *p* en *l*, qui sera le point cherché. Pour avoir l'ombre portée par ce point, sur le plan horizontal, menons par *l*, une droite parallèle à la direction de la lumière, et par *l'*, un rayon qui coupera a*b* en m; prenons *i*m, que nous porterons de *l* en *m*, qui sera le point cherché, et ainsi des autres. Rappelons-nous que par cette seule opération, nous pouvons avoir quatre

points sur chacune de ces ellipses, qui sont *l*, *q*, *r*, *s* et *m*, *t*, *u*, *v*, à cause de leurs distances, respectivement égales, des axes. Nous trouverons l'ombre sur la projection verticale de AB, de la même manière que nous avons trouvé le point *l*. Il y a cependant plusieurs points de cette ombre que nous pouvons avoir directement; tels sont *i*, *h*, qui appartiennent à la circonférence du grand cercle horizontal, et dont les projections seront sur le diamètre $x'y'$ qui est la projection verticale de ce cercle; tels sont encore les points 1, 2, qui sont sur la circonférence du grand cercle vertical parallèle au plan AB, et dont les projections seront en $i'2'$. Les ombres des projections horizontale et verticale sur la sphère sont égales.

Cherchons maintenant l'ombre dans l'intérieur d'une demi-sphère concave ou creuse, posée horizontalement (fig. 2). Menons les tangentes *ab*, *cd*, et, par le centre, la droite *efg*. Ces lignes seront les projections horizontales de la lumière, et les points de tangence *h*, *i*, seront à la naissance de l'ombre cherchée. Pour trouver un autre point de cette ombre sur la droite *eg*, concevons, comme dans l'exemple précédent, que la demi-sphère soit coupée par un plan vertical, dont cette ligne est la trace. Couchons cette coupe dans le plan vertical en $e'hg'$, par e', projection verticale de *e*; faisons passer un rayon qui projettera l'ombre de ce point en k', dans la concavité de la courbe; de ce point abaissons une perpendiculaire sur *eg*, qui coupera la ligne en *k*, qui sera le point cherché. Nous avons donc déjà trois points de l'ombre que nous cherchons, ce qui ne suffit pas pour tracer une courbe. Prenons à volonté autant de points que nous jugerons à propos, sur l'arc *hei*, par exemple, *l*; menons par ce point la projection horizontale d'un rayon, qui coupera la demi-sphère en *lmn*; la projection verticale de cette coupe sera le demi-cercle, $l'm'n'$; menons un rayon par l', qui portera l'ombre de ce point sur la courbe en o'; abaissons de ce point une perpendiculaire sur *ln*, le point d'in-

tersection *o*, sera le point cherché. Il en sera de même de tous les autres points, par lesquels nous mènerons la courbe *hokoi*, etc., qui sera la limite de l'ombre en question.

Si la demi-sphère proposée était en projection verticale, comme dans la figure 3, nous prendrions *eg*, projection verticale de la lumière, pour le plan coupant, et nous ferions le reste de l'opération absolument comme ci-dessus, car nous devons nous ressouvenir que dans la direction de la lumière que nous avons adoptée jusqu'ici, les deux plans de projection sont frappés par le rayon sous des angles égaux ; c'est pourquoi les deux opérations que nous venons de faire sont absolument semblables, ainsi que leurs résultats. Nous allons encore en voir une nouvelle application dans le problème suivant.

PROBLÈME 13. *Déterminer l'Ombre dans l'intérieur d'une Niche* (fig. 4).

Nous devons d'abord observer que la niche est composée de deux parties dont nous connaissons déjà les formes : savoir, la partie inférieure qui est cylindrique, et la partie supérieure qui est sphérique ; par conséquent, nous devons opérer de la même manière que nous l'avons fait pour la concavité du cylindre et de la sphère. Menons par c, et par c', les projections de la lumière, à l'extrémité de cd ; élevons une perpendiculaire à AB, qui nous donnera le point d' : la droite d'd sera la limite de l'ombre appartenant au cylindre. Par x, centre de la partie sphérique supérieure de la niche (qui n'est que le quart d'une sphère, mais que nous considérons pour l'instant comme étant une demi-sphère), menons $f'g'$, projection verticale de la lumière et coupant la demi-sphère, dont nous projetterons la coupe en FhG ; menons le rayon Fi ; abaissons une perpendiculaire sur $f'g'$, ce qui nous donnera le point d'intersection i', qui sera l'ombre de f', dans l'intérieur de la demi-sphère. Nous avons donc les deux

demi-axes d'une ellipse qui sont hx, $i'x$. Par conséquent, nous pouvons construire le quart hk'i', de cette ellipse, par le moyen ordinaire de la règle de papier. Observons que ce quart d'ellipse appartient à la demi-sphère que nous avons supposée pour plus de commodité; mais comme ici nous n'en avons que le quart qui est déterminé par le diamètre $c'e'$, il n'y aura donc que l'arc hk', qui appartiendra à la partie sphérique de la niche, par conséquent l'arc $k'i'$, devra appartenir à la partie cylindrique de cette même niche, comme est $k'n'$. Pour parvenir à trouver cet arc, cherchons d'abord la projection horizontale de f', qui sera f, et par laquelle nous ferons passer le plan fn. Par n, élevons une perpendiculaire qui coupera $f'g'$ en n', qui sera le point cherché, par lequel nous mènerons l'arc $k'n'd'$. Ainsi l'arc hk' est l'ombre de l'arc $l'm'$h', et l'arc $k'n'd'$, est l'ombre de l'arc $l'f'o'c'$. Nous croyons inutile de dire que dans un dessin plus grand nous serions obligés de chercher un plus grand nombre de points pour pouvoir tracer plus correctement ces arcs, tel que le point o, o', p', etc.

Problème 14. *Déterminer l'Ombre sur la surface d'un Cylindre dont l'axe est circulaire* (tel est un anneau) *et dont la forme extérieure est nommée* Tore (fig. 1, pl. 12).

Soit cd, la projection horizontale de la lumière. Si, comme dans les exemples précédens, nous considérons cette ligne comme étant la trace d'un plan coupant, le résultat de cette coupe sera deux cercles égaux, qui auront pour diamètre ef, gh; et comme ces deux cercles sont dans une même situation par rapport à la lumière, les résultats doivent être égaux. Par conséquent, nous n'aurons besoin que d'opérer sur l'un des deux, qui sera gh, et tous les points que nous trouverons, nous les rapporterons au cercle ef. Couchons d'abord le cercle gh, dans le plan horizontal en GH, et menons les rayons Id, Kl, tangens au cercle aux

points I, K; il est facile de voir que ces points sont les limites de l'ombre et de la lumière sur ce cercle, et que les ombres de ces mêmes points sur le plan horizontal, seront à l'intersection des rayons et de la droite *cd*, aux points *d*, *l*; et qu'en abaissant sur *cd*, des perpendiculaires des points I, K, nous aurons pour leurs projections horizontales les points *i*, *k*, et dont *i* sera supérieur ou en dessus, et *k*, inférieur ou en dessous; de même qu'en menant un rayon tendant au centre M du cercle, nous aurons N pour le point le plus éclairé, et *n* pour sa projection horizontale. Par cette opération, nous avons obtenu les points *n*, *k*, *l*, *i*, *d*, que nous reporterons sur *cd* en *o*, *p*, *q*, *r*, *s*. Si maintenant nous faisons une coupe selon la droite *tu*, parallèle à AB, nous aurons deux cercles qui seront égaux aux précédens; la projection de la lumière sur ce plan sera la même que celle sur le plan vertical, c'est-à-dire, une droite telle que V*u*, faisant un angle de 45° avec *tu*. Par conséquent les points de tangence V, X, auront *v*, *x*, pour projections horizontales, et *y*, *u*, pour ombres portées sur le plan horizontal. Observons que ces deux derniers points ne sont pas à leur place; et comme nous n'avons besoin ici que du seul point *u*, nous négligerons *y*, si nous le jugeons à propos. Par *v*, projection horizontale de V, menons une droite indéfinie parallèle à *cd* : l'ombre de V devra se trouver sur cette ligne en *z*, et nous pouvons la trouver de plusieurs manières, 1° en élevant de *u*, une perpendiculaire qui coupera la ligne en *z*; 2° en portant de *v* en *z*, la diagonale du carré de la hauteur *v*V; 3° en élevant de *v*, la droite *v*V′, égale à *v*V, et perpendiculaire à *vz*, ensuite mener par V′ un rayon V′*z* parallèle à I*d*, puisque *vz* est parallèle à *cd*.

Faisons encore une coupe par le centre selon la droite 1, 2; la projection de la lumière sur ce plan sera un angle droit ou de 90° : par conséquent les points de tangence seront 3 et 4, et leurs projections horizontales seront 5 et 2; l'ombre portée sur le plan horizontal

par le point 4, sera 6. Nous trouverons ce point en portant de 2 en 6, la diagonale du carré de la hauteur 2, 4. Nous avons maintenant suffisamment de points pour tracer la courbe *iv*2, qui sera le quart de l'ombre du corps, et la courbe *dz*6, qui sera le quart de l'ombre portée par la courbe *iv*2, sur le plan horizontal. Ceci nous suffira pour tracer le reste de ces ombres, ainsi que la projection de l'ombre du corps sur sa projection verticale. Nous croyons que l'inspection de cette figure doit nous suffire (en l'étudiant cependant un peu), et de crainte de la surcharger de lettres, et pour éviter la confusion, nous n'en dirons pas davantage.

Ce que nous avons dit jusqu'ici sur les ombres, renferme tous les principes de cette science, ainsi que toutes les difficultés qui peuvent se rencontrer dans l'exécution des différens problèmes. La multiplicité des exemples que nous pourrions donner ne pourrait rien y ajouter d'essentiel, et augmenterait considérablement les frais de cet ouvrage, et ne nous dispenserait nullement d'étudier cette partie, ce qui est absolument nécessaire pour pouvoir l'entendre. Nous allons cependant en donner encore un exemple.

Problème 15. *Étant données les Projections d'un Cône et d'une Sphère, déterminer l'Ombre du premier de ces corps sur le second* (fig. 1, pl. 13).

Nous croyons devoir prévenir que ce problème exige toute notre attention, comme réunissant les principales difficultés qui peuvent se rencontrer dans l'application des ombres. Nous supposerons aussi que les ombres qui appartiennent proprement au cône et à la sphère séparés l'un de l'autre, ont été trouvées par les moyens que nous avons vus précédemment, afin de ne pas surcharger inutilement cette figure qui est déjà assez compliquée. Soient *cd* la projection horizontale de la lumière; E*d*, le rayon; *e*E, la hauteur du cône; *fghd*, l'ombre portée par le cône sur le plan horizontal (abstraction faite de la projection horizontale de la

sphère); *ef*, *eh*, les limites de l'ombre sur la surface horizontale du cône; *i*E, la projection verticale de l'ombre du cône ou des droites *ef*, *eh*; *c*E*g*, la projection verticale du cône.

Nous avons déjà dit que les droites *fd*, *hd*, étaient les traces de deux plans inclinés au plan horizontal, tangens à la surface du cône selon les droites *ef*, *eh*, et se réunissant à l'arête E*d* ou *ed*, qui en est la projection horizontale. Si nous plaçons dans l'ombre portée par le cône dans le plan horizontal une sphère, il est évident qu'une partie de cette ombre se projettera sur cette sphère; c'est là ce qui est l'objet du problème qui nous occupe. Supposons donc la sphère coupée par un plan vertical *cd*, selon le diamètre *gj*; faisons la projection verticale de cette coupe sur ce diamètre, nous aurons le cercle *kl*K*m*, qui interceptera le rayon E*d* en un point N, qui aura *n* pour projection horizontale; ce point sera donc l'ombre du sommet du cône projetée sur la sphère. Nous pourrions trouver les autres points de la même manière en multipliant les opérations; mais à cause de la grande obliquité de plusieurs lignes, nous ne pourrions les obtenir avec assez de précision : c'est pourquoi nous allons employer un moyen plus général, plus direct, et qui de plus, nous donnera l'intelligence de plusieurs opérations qui nous paraîtraient fort difficiles, en employant les moyens ordinaires. Par ce nouveau moyen, nous pourrons trouver en une seule opération une série de plusieurs points, ce qui abrège infiniment le travail.

Nous allons donc considérer la sphère comme étant coupée par un plan incliné au plan horizontal dont la trace sera *fd*. Il ne s'agit plus que de connaître l'inclinaison de ce plan, ce qui n'est pas difficile, puisqu'il est tangent à la surface du cône selon la droite *fe* (il aura donc même inclinaison que le côté du cône sur sa base), qui est la projection horizontale de la droite *i*E. Nous aurons donc un triangle rectangle dont un côté sera *fe*, le second sera l'axe du cône qui est perpendiculaire à *ef*, et dont la hauteur

eE' est connue, puisqu'elle est égale à ce même axe; enfin, le troisième côté sera l'hypoténuse fE', dont l'angle $E'fe$, mesurera l'inclinaison cherchée du plan coupant. Concevons ce triangle relevé sur sa base fe, nous aurons une idée de l'inclinaison de ce plan *dfe*. D'après cela, de k (centre de la projection horizontale de la sphère), abaissons de part et d'autre une perpendiculaire sur df, cette ligne ab sera parallèle à fe, et nous servira de plan vertical pour projeter la sphère, ainsi que le plan coupant incliné. Pour cela, élevons de e sur ab, une perpendiculaire sur laquelle nous porterons la hauteur eE', de e en E″; ensuite projetons f en f; menons fE″, et nous aurons un triangle rectangle efE², semblable et égal au premier, par conséquent nous aurons aussi l'inclinaison du plan coupant mesurée par l'angle efE². Maintenant, avec le rayon kk', perpendiculaire sur ab, décrivons un cercle qui sera la projection verticale de la sphère. Actuellement nous devons facilement voir que cette sphère se trouve coupée par le plan incliné fE², ou par l'ombre du cône selon la droite $o'p'$, qui sera un des diamètres du cercle de cette coupe. La projection horizontale de ce diamètre sera op, que nous partagerons en deux parties égales au point q, ou bien de q', moitié de $o'p'$, abaissons une perpendiculaire à ab, qui coupera la circonférence aux points r, s; la ligne rs sera le grand axe de l'ellipse, et op le petit : cette ellipse sera la projection horizontale du cercle produit par la coupe de la sphère, et que nous pouvons tracer avec la règle de papier; mais comme ici nous n'avons besoin que de la moitié de l'ellipse, nous nous dispenserons de la décrire entièrement. Nous ferons la même chose à l'égard de la trace hd, et nous transporterons ces ombres sur la projection verticale AB (fig. 1, pl. 14), où la projection est entière; nous avons mis cette seconde figure, pour éviter la confusion dans la première.

Nous croyons nécessaire d'ajouter encore un exemple qui nous

prouvera l'avantage qu'il y a de savoir résoudre un problème par plusieurs procédés, puisque nous serons obligés dans celui-ci de changer de méthode, c'est-à-dire que nous commencerons l'opération d'une manière qui nous donnera directement les points que nous cherchons, et si nous voulions continuer suivant le même mode, nous aurions beaucoup plus de travail et moins de précision.

Problème 16. *Déterminer l'Ombre d'une surface concave de révolution, nommée en Architecture* Piédouche (fig. 1, pl. 15).

Soient A, B, les projections du corps proposé; 1, 2, 3, 4, etc., sont les traces d'autant de plans coupans parallèles à la direction de la lumière. Nous chercherons d'abord la projection verticale de la tranche 2, qui nous servira de modèle pour les suivantes. Pour y parvenir, nous commencerons par diviser la concavité du corps B, par tranches horizontales comme $c'd'$, $e'f'$, $g'h'$, $i'k'$, etc., qui seront exprimées par autant de cercles dans la figure A. Observons en passant, qu'il est avantageux dans ces sortes de cas, pour éviter de multiplier les lignes sans nécessité, de faire, autant que possible, les tranches de même diamètre, afin de n'avoir pour leurs expressions horizontales qu'un seul cercle pour deux tranches, telles sont les tranches $a'b'$, $i'k'$ et $c'd'$, $g'h'$, etc. Cherchons maintenant notre coupe verticale de la tranche 2. Il est évident que le premier point 2, sera sur la tranche $q'r'$ en $2'$; le second l, sur la tranche i'k$'$ en l', ainsi que sur celle $a'b'$ en p'; le troisième m, sera sur les tranches $g'h'$, $c'd'$ en m' et o'; enfin le quatrième point n, sera sur $e'f'$ en n'. Par tous ces points, nous ferons passer la courbe $p'o'n'm'l'2'$, qui sera la projection verticale de $2lmn$. Ensuite par p', nous menerons la projection du rayon qui sera arrêté par la courbe en s', qui sera le premier point de l'ombre cherchée. Nous trouverons de la même manière les points e, t, u, etc., ce

qui nous donnera la courbe $e's't'u'$, qui sera la portion d'ombre portée par l'arc vx ou $v'x'$. Le point u' appartiendra donc à la coupe horizontale 4, dont la projection verticale est déjà si différente des premières ; et si nous voulions continuer comme nous avons commencé, nous aurions des coupes très irrégulières, et dont les lignes pourraient être coupées si obliquement, que nous aurions beaucoup de peine à obtenir une précision suffisante ; c'est pourquoi nous allons changer de marche pour avoir le reste de l'ombre.

Concevons que la tranche ou le cercle $q'r'$, soit un plan horizontal indéfini, sur lequel le cercle supérieur $a'b'$, projette son ombre (abstraction faite de la concavité intermédiaire du corps). Nous savons que pour obtenir cette ombre, nous n'avons qu'à mener un rayon par y' (projection verticale du centre y), jusqu'à sa rencontre en z', avec le plan $q'r'$, et de ce point z', abaisser une perpendiculaire qui coupera la projection horizontale de la lumière, et passant par le centre y, nous donnera z, pour l'ombre du centre du cercle $a'b'$, sur le plan horizontal. Comme ce cercle est parallèle au plan horizontal, son ombre sera un cercle de même rayon. De z, comme centre, traçons cette circonférence qui coupera le cercle horizontal $q13r$ en 6, qui sera nécessairement un point de l'ombre cherchée ; mais comme 6 est très près de r, nous pouvons prendre sans erreur sensible r' pour sa projection verticale. Cherchons maintenant un autre point, que nous trouverons de la même manière que le précédent. Le rayon $y'z'$, coupe la tranche $i'k'$ au point $7'$. En abaissant de ce point une perpendiculaire, nous aurons le centre 7, ou l'ombre du centre y', sur le plan $i'k'$ prolongé, ou ik; de ce centre 7, nous décrirons un cercle égal au premier, ou plus simplement un arc sur la circonférence horizontale ik, de la tranche $i'k'$, ce qui nous donnera un second point 8, et dont la projection verticale sera $8'$. Il en sera de même de toutes les autres tranches de B, qui nous donneront successi-

vement les centres 9, 10, etc., ainsi que les arcs 11 et 12, etc., et dont les projections en B seront 11′, 12′. Par les sections 12, 11, 8, 6, nous ferons passer une courbe qui sera la projection horizontale de la portion d'ombre portée dans la concavité de la figure. Nous ne dirons rien sur ce qui reste à faire pour terminer l'ombre portée par le corps sur le plan horizontal, ainsi que sur la portion relevée dans le plan vertical. Ce que nous avons fait jusqu'ici, joint à l'inspection de la figure, doit nous suffire pour cela.

Nous bornerons ici ces principes qui contiennent tous les élémens nécessaires pour aller plus avant dans cette partie, car ce n'est réellement pas tant la quantité d'exemples qui instruit beaucoup, qu'un travail persévérant, gradué, et fait avec discernement. Nous ne cesserons de répéter que celui qui veut faire quelques progrès dans l'étude des ombres, doit multiplier les problèmes qu'il se proposera à lui-même, en commençant par les plus faciles qu'il étudiera sous tous les rapports, et en passant successivement à de plus difficiles. Par cet unique moyen, il parviendra à vaincre les difficultés qui se rencontrent assez souvent dans cette étude, difficultés beaucoup plus grandes qu'on ne le croit communément. Il fera bien aussi de s'aider de modèles en bois ou en carton des différens corps élémentaires dont nous avons parlé dans les exemples que nous avons vus ; et lorsqu'il sera suffisamment instruit, il pourra avec connaissance de cause s'éviter un travail superflu, et même plus nuisible qu'utile dans beaucoup d'occasions. Par exemple, nous croyons que dans tous les dessins d'architecture civile et militaire, dans ceux de machines, dans les cartes topographiques, etc., on ferait très bien de supprimer les ombres portées, qui étant même bien exécutées (ce qui arrive rarement), nuisent plus qu'elles ne servent à l'effet, ce qui est absolument contraire au but qu'on se propose ; mais comme c'est une vieille habitude, suivie universellement, et

même sans exception, notre proposition pourra bien être traitée de paradoxe; et comme un paradoxe n'est pas un sophisme, nous nous permettrons d'exposer les raisons sur lesquelles nous fondons notre manière de voir; et comme nous ne prétendons pas exiger que personne voie comme nous, chacun fera là-dessus ce qu'il jugera à propos. Mais nous déclarons en particulier, que nous nous en sommes souvent très bien trouvé, et que nous avons gagné beaucoup de temps et évité un travail considérable.

Lorsque nous voulons examiner une pièce de mécanique compliquée et dont les pièces sont polies, comme les roulages d'une pendule, un métier à faire des bas, etc., nous nous gardons bien de l'exposer au soleil, car la quantité de points lumineux réfléchis, d'ombres portées, etc., nous fatiguerait tellement la vue, que nous la verrions très mal. Mais si nous modérons la concentration de la lumière du soleil par l'interposition d'une glace dépolie, les ombres portées disparaîtront, ainsi que les réflexions de la lumière; alors nous verrons cette pièce très distinctement, et l'effet considéré pittoresquement sera infiniment plus agréable. Si nous ajoutons que très souvent il est physiquement impossible de tracer exactement ces ombres, à cause du travail immense que cela exigerait, il résultera évidemment de cet exposé, trois avantages incontestables, 1° suppression d'un travail pénible; 2° grande économie de temps; 3° effet beaucoup plus avantageux pour le dessin. Nous allons ajouter à ces raisons deux observations que nous avons eu occasion de faire à ce sujet.

Du temps de la République, il y avait un bureau de dessinateurs attaché au Comité de salut public; et M. de Fourcroy qui en était membre, recommandait surtout aux dessinateurs de lui apporter leurs dessins lorsqu'ils ne seraient encore qu'au trait, parce que, disait-il, quand vous y avez mis les ombres portées, je n'y reconnais plus rien.

A peu près à cette même époque, nous étions attaché à l'École des mines, où nous voulûmes introduire cette nouvelle manière de dessiner qui fut aussitôt désapprouvée, même avant d'être connue, et nous n'en parlâmes plus. Quelque temps après, on nous chargea de faire le dessin d'une machine à refendre les cuirs; nous profitâmes de cette occasion pour faire l'essai de notre nouveau système, sans en rien dire. Lorsque le dessin fut fini, l'ingénieur chargé de l'inspection nous en témoigna sa satisfaction; mais quand nous lui fîmes l'observation que les ombres portées étaient supprimées, aussitôt, et sans nous répondre, il nous tourna le dos, et parut très piqué de notre observation.

Il ne faudrait pas conclure de ce que nous venons de dire, que l'étude de la construction des ombres devient inutile, car pour se permettre de supprimer à propos les ombres portées dans les dessins civils ou militaires, il faut parfaitement en connaître la théorie. D'ailleurs, il y a des circonstances dans lesquelles on ne peut se dispenser de les observer rigoureusement; telles sont des parties des paysages éclairées par le soleil, des scènes de nuit éclairées par la lune, un flambeau, une lampe, etc., et surtout des vues intérieures de souterrains, où le jour ne saurait pénétrer. Nous croyons seulement qu'on peut les supprimer avec avantage toutes les fois qu'elles ne sont pas absolument nécessaires, et on y gagnera de toutes manières.

Nous ne doutons pas qu'on ne nous objecte que, d'après la direction de la lumière qui est adoptée, la largeur des ombres portées étant égale à la saillie des corps, on peut par leur moyen avoir facilement une connaissance exacte de ces saillies. Nous répondrons à cela, ce que nous avons déjà dit au commencement de la Géométrie descriptive, que l'on ne peut avoir par le dessin, aucune idée exacte des dimensions d'un corps, que par le concours des deux projections. Et, en effet, jamais, en fait de dessins civils ou militaires, on ne présente une projection isolée. Par

conséquent les ombres portées deviennent absolument inutiles pour cet objet.

Lorsque nous conseillons de supprimer les ombres portées dans la plupart des dessins, il ne faut pas entendre une suppression totale. Afin de se former une idée précise de ce que nous entendons, nous allons tâcher de nous faire comprendre par quelques exemples. Si d'abord nous plaçons un corps quelconque, qui soit blanc, tel qu'un cylindre, une sphère, etc., sur un plan horizontal, et que nous l'exposions au soleil, nous verrons l'ombre de ce corps, ainsi que son ombre portée, d'une manière bien tranchée, c'est-à-dire que les limites en seront bien prononcées. Ensuite plaçons entre le soleil et ce corps, une glace mince et dépolie d'un côté seulement, alors nous verrons l'ombre du corps un peu adoucie, et l'ombre portée extrêmement affaiblie. A cette première glace, ajoutons-en une seconde, et même une troisième s'il est nécessaire (ces deux dernières peuvent être dépolies des deux côtés); nous verrons que l'ombre du corps sera encore très sensible, tandis que l'ombre portée aura entièrement disparu à une distance plus ou moins grande de sa naissance, et terminera insensiblement d'une manière vague et harmonieuse.

Si nous soumettons à cette expérience plusieurs corps, groupés de manière que les uns se touchent et que les autres soient à des distances plus ou moins grandes des premiers, nous distinguerons parfaitement les ombres de ces corps, et par conséquent leurs formes, l'harmonie de ce groupe ne sera point troublée par les nombreux et durs ressauts des ombres portées. Nous verrons, que lorsqu'un corps touche immédiatement un autre corps, il n'indique sur celui-ci que la naissance de l'ombre portée, et que ce rudiment d'ombre s'affaiblit en raison de la distance d'un corps à un autre, distance qui est généralement très petite. Nous voyons donc que par ce moyen, nous pouvons modifier à notre gré la lumière du soleil : c'est donc à nous de sentir le degré d'affai-

blissement qui convient le mieux au but que nous nous proposons.

Si nous voulons nous donner la peine d'observer, nous verrons souvent cet effet dans la Nature. Lorsque par un beau soleil nous regardons une collection d'objets, comme un palais, une ville, etc., nous avons la vue blessée par les grandes et nombreuses oppositions des vives lumières et des ombres portées. Mais s'il survient un léger nuage qui voile faiblement le soleil, alors nous voyons ces mêmes objets beaucoup plus distinctement qu'auparavant, nous ne perdons rien de leurs formes ni des rapports de teintes qui existent entre eux ou entre leurs parties. Nous ajouterons encore à toutes ces raisons, que si nous voulions absolument tenir à l'idée de juger du relief des corps, par la longueur des ombres portées, tant sur les dessins que sur les cartes topographiques, notre moyen se trouverait fréquemment en défaut ; car ces ombres sont le plus souvent portées sur des surfaces très irrégulières et inclinées dans tous les sens. Nous terminerons en ajoutant trois figures à l'appui de tout ce que nous avons dit. La première sera une niche (fig. 1, pl. 16) que nous pourrons comparer à celle qui est ombrée (fig. 4, pl. 11). La seconde (fig. 2) sera un cône portant son ombre en partie sur un cylindre, sur le plan horizontal et sur le plan vertical, le tout éclairé par le soleil (fig. 2 *bis*). Enfin, la troisième (fig. 3) qui est le même sujet que la précédente, sera faite d'après les principes que nous venons d'exposer et pourra se comparer avec elle.

Nous devons voir, particulièrement d'après ces dernières figures, que l'application de ces principes aux dessins civils et militaires, consistent seulement à bien sentir le jeu de la lumière sur les surfaces des différens corps, ainsi que les formes de la naissance des ombres portées par d'autres corps qui les touchent immédiatement, ou qui en sont peu éloignés, et il est très rare qu'on soit obligé de faire quelques petites opérations, ce qui est d'un grand avantage sur la manière suivie jusqu'ici. En un mot,

plus on sera instruit dans la science des ombres, moins on sera obligé de faire des opérations longues et pénibles, sans aucune nécessité absolue.

La figure 2 *bis* représente l'opération par laquelle on a trouvé les ombres de la figure 2, et la figure 3 qui représente le même sujet a été lavée sans avoir fait aucune opération pour en déterminer les ombres.

FIN DE LA PROJECTION DES OMBRES.

LIVRE CINQUIÈME.

DE LA PERSPECTIVE.

Nous avons déjà dit, en parlant de la lumière, qu'un point lumineux ou illuminé *a* (fig. 1, pl. 1) envoyait des rayons divergens dans toutes les directions, et que la portion de ces rayons qui tombait sur notre œil, formait un cône dont la prunelle était la base. Nous pourrions croire avec assez de vraisemblance, que la somme de tous ces rayons est absolument nécessaire à la vision du point *a*. Pour nous en assurer, plaçons près de notre œil un plan opaque *bc*, percé en *d* d'un trou d'aiguille, nous verrons à travers ce trou le point *a* aussi distinctement qu'avant l'interposition de ce plan. Nous voyons cependant que tous les rayons divergens qui forment un cône sont interceptés par le plan à l'exception du seul rayon *ad*, qui est l'*axe du cône*. Par conséquent, tous les rayons étrangers à cet axe ne contribuent donc en rien à la vision d'un point; et comme il en serait de même de tout autre point, nous pouvons conclure que *nous ne voyons tous les points de la surface d'un corps, que par le moyen des seuls rayons qui représentent les axes des différens cônes formés par les faisceaux émanés de chacun de ces points*; d'où il suit que nous sommes suffisamment autorisés à ne considérer qu'un seul rayon visuel pour chacun des points dont nous aurions à nous occuper.

Soit la droite *ab* (fig. 2), placée devant l'œil *c*; il sera évident que la somme des rayons visuels qui émanent de chacun des points de cette ligne à l'œil, tels que *ac*, 1*c*, 2*c*, etc., formera un triangle *abc*, dont *ab* sera la base, et dont l'œil *c* sera le

sommet. Cet œil verra donc la droite *ab* selon l'angle *acb*, nommé *angle optique*. Nous devons facilement voir que si au lieu d'une ligne, nous avions une surface terminée par des lignes droites ou par une ligne courbe, le résultat serait, selon le cas, une pyramide ou un cône, dont cette surface serait la base, et dont l'œil serait le sommet. Considérons maintenant cette même droite *ab* en AB (fig. 3), le globe de l'œil étant représenté par un cercle, et l'ouverture de la prunelle supposée en *c*. Le rayon émanant de A, en entrant par *c*, ira jusqu'au fond de l'œil, où il peindra son image sur la rétine en a. Et comme il en serait de même de tous les autres rayons qui émanent de chacun des points de cette ligne, dont les images se trouveront entre les points a, 3, b, l'image entière de AB, sera représentée sur la rétine par une courbe a3b. Concevons cette même droite AB, reculée de l'œil jusqu'en A′B′; puis menons des même points les rayons visuels A′*c*, 3′*c*, B′*c*: nous verrons d'abord que l'angle optique A′*c*B′, sera plus petit que l'angle A*c*B, et que l'image a′3b′ sera aussi plus petite que la première a3b. Et comme nos sensations visuelles sont en raison de la grandeur des images peintes sur la rétine, nous en pouvons conclure que *plus un objet est éloigné de l'œil, plus l'angle sous lequel cet œil le voit est petit*. Par conséquent, son image au fond de l'œil est aussi plus petite; donc, *plus un même objet est éloigné de notre œil, plus nous le voyons petit.*

L'observation a fait reconnaître que le plus grand angle sous lequel l'œil puisse voir distinctement un ou plusieurs objets est l'angle droit.

(Fig. 3). Si entre l'objet que nous regardons et notre œil, nous interposons un plan transparent *de* (tel qu'une glace), les intersections de ce plan avec les rayons visuels, sont nommées *perspectives des points* d'où émanent ces rayons. Ainsi *a*, est la perspective du point A; il en sera de même de tous les autres points. Et comme deux points déterminent la longueur d'une droite, il s'en-

suit que ab est la perspective de la ligne AB, et $a'b'$, celle de la même droite vue de A'B'. Nous voyons par là que les apparences perspectives sont en raison de la grandeur des angles optiques. Donc, *les objets nous paraissent plus ou moins grands, en raison de l'angle sous lequel nous les voyons*. De plus, soient les droites A'B', fg, inégales en longueur, situées dans un même plan, et à différentes distances de l'œil c. Menons par leurs extrémités les rayons visuels; nous verrons que les angles A'cB', fcg, sont égaux, que les images de ces deux lignes sur la rétine sont aussi égales, et que par conséquent elles sont confondues comme étant dans un même plan; il en sera de même dans leurs perspectives $a'b'$, dans le tableau. Donc, *des grandeurs inégales, vues sous des angles égaux, peuvent paraître égales*. Par conséquent, une ligne près de l'œil peut être vue sous un angle plus grand, que ne le serait celui sous lequel on verrait une plus grande ligne à une plus grande distance. Donc, un petit objet peut nous paraître plus grand qu'un semblable objet beaucoup plus grand que lui. Puisque des grandeurs égales peuvent nous paraître inégales, et que des grandeurs inégales peuvent nous paraître égales, nous ne voyons donc pas les objets tels qu'ils sont en effet, mais bien tels qu'ils nous paraissent : d'où il suit que *la Perspective est une science qui nous donne les moyens de représenter sur une surface quelconque les limites des objets, tels qu'ils nous paraissent, lorsque nous les regardons d'un point donné*. Nous ne pouvons donc trouver la perspective d'un ou de plusieurs objets que par l'intersection des rayons émanant de ces objets à l'œil, et d'un plan (que nous nommerons dorénavant *tableau*) situé entre l'œil du spectateur et ces mêmes objets. Nous commencerons donc par chercher la perspective d'un point, et comme ce premier problème est à peu près le fondement de toute la perspective, nous devons y apporter toute notre attention. Nous parlerons ensuite des moyens d'abréger les opérations.

PROBLÈME PREMIER (fig. 4). *Étant données les projections d'un point, celles de l'œil, et celles d'un tableau, trouver sur ce tableau l'apparence, ou la Perspective de ce point.*

Ce problème ne doit nous présenter aucune difficulté, puisque nous pouvons le résoudre par le seul moyen de la Géométrie descriptive, moyen que nous connaissons déjà. Soient a, a' les projections du point donné, b, b' celles de l'œil, et CD, cde' celles du tableau. Des points a, a' menons les droites ab, ab'; ces lignes seront les projections du rayon visuel, mené du point donné à l'œil du spectateur. Nous voyons que ab, projection horizontale du rayon, traverse le tableau en a; ce point d'intersection étant commun au tableau et au rayon, doit donc se trouver dans la projection verticale du tableau, et dans celle du rayon $a'b'$ en a', qui sera la perspective du point donné.

Si nous voulons résoudre le même problème en opérant directement par le rayon lui-même, couchons dans le plan horizontal les hauteurs aA du point donné, et celle bB de l'œil; menons le rayon AB de a·, menons une perpendiculaire à ab, qui coupera le rayon AB, en A·; portons la hauteur a·A· dans le tableau vertical de f, en a', ce qui nous donnera le même résultat. Nous pourrions trouver de la même manière la perspective d'une ligne, d'une surface, d'un solide, tel que le cube GHIK, qui est à la droite du tableau. Ainsi, nous voyons qu'à la rigueur, nous pourrions effectuer toutes les opérations de la perspective, par les plus simples élémens de la projection, ou géométrie descriptive.

Quoique cette manière d'opérer soit la plus simple et la plus claire, pour donner l'intelligence de la perspective, nous ne la suivrons pas toujours dans ce qui nous reste à voir, parce que, 1° elle a l'inconvénient de réunir sur le tableau les projections verticales et perspectives, ce qui (lorsque le dessin est compliqué) produit une telle confusion de lignes qu'il n'est plus possible de

s'y reconnaître ; 2° parce qu'elle n'est pas la plus expéditive. Mais tous les moyens que nous emploierons seront toujours les conséquences des principes que nous avons exposés. Ainsi, ceux qui ignorent ces principes ne peuvent espérer de tirer aucun fruit de la lecture des nombreux et bons ouvrages qui traitent de la perspective, quoiqu'ils soient annoncés à l'usage des artistes.

Nous allons passer à la perspective proprement dite, et résoudre les différens problèmes par d'autres moyens.

Dans ce que nous allons dire, nous suivrons autant que possible les figures (pl. 2, fig. 1, 1 *bis*, 2, 3, 3 *bis* et la fig. 3² de la pl. 3). Outre les deux plans de projection horizontal et vertical dont nous nous sommes servis jusqu'ici, nous emploierons encore plusieurs autres plans auxiliaires, mais particulièrement quatre que nous allons faire connaître successivement; 1° le plan horizontal AB, sur lequel est censé reposer le spectateur *g*G, ainsi que les différens objets, tels, par exemple, que le point L; et comme on a toujours considéré ce plan comme étant une portion de la surface de la terre, on l'a constamment nommé jusqu'ici *plan du terrain*, on *plan géométral*. Mais comme les différens objets peuvent être posés sur différens plans horizontaux plus ou moins élevés à l'égard de l'œil G du spectateur, que ne l'est ce plan AB, il en résulte que l'un quelconque de ces plans n'est pas plus *géométral* que les autres. Ainsi nous nommerons dorénavant tous les plans sur lesquels reposeront des objets, *plans objectifs ;* 2° le plan CR, ou *le tableau*, que nous considérerons comme étant une glace transparente posée en face du spectateur, et derrière laquelle sont placés les différens objets, l'intersection CD de ces deux premiers plans a toujours été nommée *ligne du terrain*, ou *base du tableau*. Mais comme nous serons souvent dans le cas d'employer deux lignes pour exprimer le tableau, ainsi que nous le faisons, par exemple, dans la fig. 2, où nous avons dans la projection horizontale la droite *cd*, qui est la

trace ou base du tableau, et dans la projection verticale la droite cd, qui représente aussi la base du même tableau *c*R; et comme cd est la projection verticale de *cd*, il convient donc de désigner différemment ces deux lignes, afin de pouvoir les reconnaître. D'après ce que nous venons de dire, nous nommerons la droite *cd*, *tableau horizontal*, et la droite cd *base du tableau vertical*, ou, plus simplement, *tableau vertical* ou *perspectif;* 3° concevons un plan horizontal EF, passant par l'œil G du spectateur, et coupant le tableau CR à angle droit selon la droite HI; ce troisième plan EF a été nommé spécialement et par excellence *plan horizontal,* afin de le distinguer des autres plans qui lui seraient parallèles, tels que AB, etc. Nous ne voyons aucun inconvénient à lui conserver ce nom, sans cependant cesser de le considérer comme étant aussi plan objectif, dans le sens adopté par les artistes, lorsqu'il contiendra un ou plusieurs objets. L'intersection de ce plan horizontal avec le tableau ou la droite HI, est nommée *ligne horizontale, horizon du tableau,* ou simplement *horizon*; 4° enfin, le plan vertical MN, que nous supposerons aussi passer par l'œil G du spectateur, et coupant les trois autres plans chacun à angle droit, a été nommé *plan vertical*; mais pour des raisons que nous allons exposer, nous le nommerons *plan central.* Nous allons exposer les usages de ces différens plans.

Le plan EF étant le seul des plans horizontaux qui puisse passer par l'œil du spectateur, indiquera nécessairement la hauteur de cet œil par rapport au tableau, et par conséquent indiquera aussi la situation des objets qui seront au-dessous, au-dessus, ou au niveau de ce même œil. La droite HI, ou la ligne horizontale, indiquera également, dans ce tableau, si ces mêmes objets sont au-dessous, au-dessus, ou au niveau de l'horizon, ou de l'œil. Le plan central MN, étant aussi le seul des plans verticaux perpendiculaires au tableau, qui puisse passer par l'œil du spectateur, indiquera à ce spectateur si un objet est situé dans

ce plan, ou bien s'il est à droite ou à gauche de ce même plan. Les mêmes indications seront également données par ses traces (ou intersections) verticale et horizontale PQ, *g*M. D'après ce que nous venons de dire, nous devons facilement voir, que le point K, est plus bas que le niveau de l'œil, qu'il est situé dans le plan objectif AB, ainsi que dans le plan central MN, et qu'il est derrière le tableau; que le point L est aussi dans le plan objectif, et de plus, qu'il est à gauche du plan central. La partie G*g'* de l'intersection GO est nommée *rayon principal*; cette ligne peut être considérée comme étant une perpendiculaire abaissée de l'œil G sur le tableau; par conséquent le point *g'* sera la projection verticale de l'œil; c'est ce point qu'on a toujours nommé *point de vue;* et comme il a toujours été considéré comme étant le centre des rayons visuels de l'œil au tableau, nous le nommerons indifféremment *centre du tableau* ou *point central.* Nous pouvons aussi, sans aucun inconvénient, lui conserver son ancien nom de point de vue. Mais, comme il est toujours situé dans le plan vertical MN, c'est pour cette raison que nous avons nommé ce dernier plan central.

Par abréviation, nous donnerons souvent le même nom aux traces ou intersections de ce plan, avec le tableau et avec le plan objectif. Ainsi, en parlant de la droite PQ, nous dirons indifféremment *la verticale* (par excellence), *la centrale*, ou le plan central, et en parlant de la trace horizontale *g*M, nous dirons tout simplement le *plan central.* Le point *g*, qui est évidemment la projection horizontale de l'œil G, peut aussi être considéré comme étant le lieu où reposent les pieds du spectateur; c'est pour cette raison qu'on l'a nommé *point de station.* Et comme ce point est éloigné de la base du tableau de la distance P*g*, on l'a aussi nommé *point de distance.* Nous lui conserverons indifféremment ces deux noms.

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour trouver la perspective d'un point.

Soit K, le point donné; menons le rayon KG, qui traversera le tableau en k′, ce point sera la perspective de K. Il ne s'agit plus maintenant que de savoir déterminer la position de ce point. Puisque *g*, est la projection horizontale de l'œil, si nous menons la droite K*g*, cette ligne sera la projection horizontale du rayon visuel KG. Nous aurons donc un triangle rectangle K*g*G, qui se trouvera dans le plan central MN, et sera par conséquent perpendiculaire au plan objectif AB. Nous avons déjà vu que KG, hypoténuse de ce triangle coupait le tableau en *k*′; nous voyons maintenant que le côté K*g*, coupe la base de ce même tableau en P, et comme ces deux points P, *k*′, sont dans le plan du triangle et dans celui du tableau, l'intersection du tableau et du triangle sera donc la droite P*k*′. D'où il suit que pour déterminer dans le tableau la perspective de K, nous menerons de ce point une droite K*g*, qui coupera la base du tableau en P; de ce point d'intersection nous éleverons une verticale indéfinie; nous menerons le rayon KG, qui coupera la verticale en *g*, qui sera le point cherché. Il en sera de même, à l'égard du point L, ou de tout autre.

Observons que ce triangle K*g*G, se trouve coupé en P*k*′, parallèlement à son côté *g*G, par conséquent les parties de ce triangle seront proportionnelles entre elles; ainsi nous aurons K*g* : *g*G :: KP : P*k*′. Nous pouvons donc avoir la hauteur de *k*′, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes K*g*, *g*G, KP, qui sera P*k*′. Ces trois lignes peuvent toujours être connues, car K*g*, est la distance de l'objet aux pieds du spectateur, ou au point de station, ou bien encore à la projection horizontale de l'œil, que dorénavant nous nommerons par abréviation *œil horizontal;* *g*G, est la hauteur verticale de l'œil au-dessus du plan objectif, et KP, est la distance de l'objet au tableau. Ainsi la distance de l'objet à l'œil horizontal, ou au spectateur, est à la hauteur de l'œil, comme la distance de l'objet au tableau, est à la hauteur du

point perspectif dans ce même tableau. Les triangles KgG, LgG, sont semblables, puisqu'ils ont la même hauteur, et qu'ils sont compris entre parallèles ; ces triangles seront donc proportionnels : ainsi l′, perspective de L, aura une même élévation dans le tableau, que k′, perpective de K. Nous pouvons donc, pour avoir la perspective de L, nous servir du triangle KgG. Pour cela (fig. 2), projetons L, sur la trace horizontale gM du plan central ; K alors sera considéré comme étant la projection verticale de L. Faisons de même la projection verticale du tableau, en P·*d*, et celle de la hauteur de l'œil en gG; menons le rayon KG, qui coupera le tableau en k; portons la hauteur P·k, dans le tableau vertical de q, en l′. Pour éviter la confusion qui ne pourrait manquer d'avoir lieu dans la projection horizontale, si les objets étaient plus nombreux, nous devrions faire cette projection de L, à part, de la manière suivante. A une distance quelconque (fig. 3), menons une droite indéfinie parallèle à la trace gM, du plan central; projetons sur cette ligne le point L, en L·, le tableau en QR, et la hauteur de l'œil en gG; menons le rayon L·G, qui coupera le tableau QR, en l, et Ql sera la hauteur cherchée, que nous porterons dans le tableau de q, en l. Supposons maintenant, qu'un point que nous nommerons S, soit élevé perpendiculairement au-dessus de L, fig. 2, d'une hauteur égale à celle de l'œil au-dessus du plan objectif. Nous ferons la projection de ce point, de L en S, fig. 3 ; nous menerons le rayon SG, qui coupera le tableau en g', et nous porterons la hauteur Qg', dans le tableau, fig. 2, de q en s', qui sera la perspective de S; et comme ce point est aussi élevé que l'œil, sa perspective se trouvera dans le tableau, être située sur l'horizon.

Nous pouvons, de cette manière, faire toutes les opérations de la perspective, et éviter la confusion indiquée (fig. 4, pl. 1). Nous en donnerons ici un exemple qui ne doit nous présenter aucune difficulté (*voyez* les fig. 1, 2, 3, pl. 4), et que nous croyons assez

inutile de décrire, afin que les commençans s'exerçent d'eux-mêmes à faire cette opération, rien n'étant plus propre à faire bien concevoir le mécanisme de la perspective. Nous n'abandonnerons, au reste, ce dernier moyen que pour passer à d'autres plus commodes, et plus expéditifs, mais qui auraient paru trop abstraits sans la connaissance de ceux que nous venons de voir. Cependant, nous serons encore obligés d'y recourir dans plusieurs occasions.

Il nous reste encore une opération à faire avant de terminer cet article de la perspective d'un point. Dans cette opération, nous aurons l'occasion d'appliquer les proportions des triangles semblables, dont nous venons de nous occuper. C'est ce qui arriverait, par exemple, si le point proposé était à une distance tellement grande du tableau ou du plan central, que sa position ne pût pas être indiquée sur notre papier (ce qui arrive souvent), ou même que cette distance fût assez grande pour rendre l'opération incommode. (fig. 1, pl. 3).

Soit A, le point donné; nous supposerons sa perspective A′, trouvée par l'un des moyens précédens; rapprochons ce point A, du tableau, de la moitié (ou d'une autre quantité quelconque) de sa distance: alors il sera en A·, puisque nous venons de rapprocher l'objet de la moitié de sa distance; rapprochons aussi l'œil horizontal *b*, de la moitié de la sienne, à ce même tableau en *b*·, afin de conserver le même rapport entre ces deux distances. Projetons ces nouveaux points sur la fig. 2 (qui est la projection faite parallèlement au plan central, et analogue à la précédente); nous aurons A·, et *b*·B·, pour la hauteur de l'œil; menons le rayon A·B·, nous verrons qu'il coupera le tableau au même point A··, que nous aurait donné le rayon AB. Appliquons ce principe à un autre point. Cherchons la perspective d'un point E (fig. 1), qui soit supposé éloigné du tableau CD, d'une quantité six fois plus grande que la distance ED. Ainsi la droite ED ne sera

donc que le sixième de la distance demandée. Par conséquent, nous rapprocherons l'œil horizontal b, des cinq sixièmes de sa distance au tableau, qui sera $b^{\cdot\cdot}a$; menons la projection horizontale du rayon visuel E$b^{\cdot\cdot}$, qui coupera le tableau en e (si nous eussions mené ce rayon de E, situé à la distance à laquelle nous le supposons, à l'œil horizontal b, il aurait coupé CD, au même point e). De ce point élevons au tableau une verticale indéfinie sur laquelle doit se trouver la perspective de E. Pour avoir maintenant la hauteur de ce point, projetons E, sur la fig. 2, la projection de ce point sera en A. Faisons de même pour $b^{\cdot\cdot}$, nous aurons la droite $b^{\cdot\cdot}$B$^{\cdot\cdot}$; menons le rayon AB$^{\cdot\cdot}$, qui coupera le tableau en E$^{\cdot}$, prenons la hauteur CE$^{\cdot}$, que nous porterons dans le tableau de e en E′, qui sera le point cherché.

Maintenant nous allons chercher la perspective d'un point F (fig. 1), qui soit éloigné du tableau CD autant que nous avons supposé être le point E, c'est-à-dire, six fois plus qu'il ne l'est ici, et que, de plus, ce point F, soit éloigné du plan central d'une distance sept fois plus grande que la droite FA, qui par conséquent ne sera que le septième de cette distance. Si le point F était à la place que nous lui assignons, le rayon horizontal, mené de ce point à l'œil b, couperait CD en g; de ce point nous éleverions une verticale au tableau, sur laquelle nous porterions la hauteur requise gF′. Mais il n'en est pas ainsi; le point en question doit être censé hors de notre papier, par conséquent nous ne pouvons mener ce rayon; il faut donc que nous rapprochions l'œil, puisque F n'est qu'au sixième de sa distance au tableau; menons de ce point à $b^{\cdot\cdot}$ (qui n'est aussi qu'au sixième de la sienne à ce même tableau) la droite F$b^{\cdot\cdot}$, qui coupera CD en f, ce qui nous donnera le triangle $b^{\cdot\cdot}$AF, coupé par le tableau en af, parallèlement à son côté AF; nous aurons donc $b^{\cdot\cdot}$A : AF : : $b^{\cdot\cdot}a$: af. Mais comme AF est le septième de la distance de F au plan central, af sera aussi le septième (dans le

tableau) de la distance de f au même plan central. Par conséquent si nous portons af sept fois sur CD, nous retrouverons le point g, car ga est le septième de la distance entière de F au plan central. Ou bien nous porterons af sept fois sur la base du tableau vertical de a en g; de ce point nous éleverons une verticale indéfinie sur laquelle nous porterons la hauteur requise de g en F′. Cette hauteur sera égale à celle de E′, puisque ces deux points sont également distans du tableau, car A, fig. 3, sera la projection de F, et le rayon AB·· coupera le tableau en E·; donc CE· sera la hauteur cherchée.

Des Lignes et des Plans. (Fig. 3, pl. 3, et fig. 1, 2, pl. 5).

PROBLÈME 2. *Trouver la Perspective d'une droite donnée.*

Soit AB la droite donnée. Des extrémités A, B, de cette ligne, menons à l'œil horizontal, les rayons Ac : Bc; nous voyons dans toutes ces figures que le tableau n'est pas coupé par ces rayons Ac, Bc, AC, BC, par conséquent chacun de ces points sera à la fois original et perspectif. Donc, *lorsqu'une droite est située dans le plan du tableau, cette ligne n'éprouve aucun changement, et est à la fois originale et perspective.*

Voyons maintenant quelle sera la perspective d'une droite DE, parallèle au tableau et située dans le plan objectif. Ayant mené des extrémités de cette ligne, les projections Dc, Ec, dc', bc', des rayons, ainsi que ces rayons eux mêmes DC, EC, nous aurons un triangle DCE, dont la base DE sera parallèle à celle du tableau, par conséquent chacun des points D, E, de cette base, sera également éloigné de celle de ce même tableau; leurs hauteurs dans le tableau seront donc les mêmes; donc la droite comprise entre ces deux points $d'e'$, ou la perspective de DE, sera parallèle à la base du tableau. De plus, le

triangle DCE sera coupé par le tableau parallèlement à sa base DE; donc l'intersection $d'e'$ sera parallèle à cette même base, et par conséquent à celle du tableau. Donc, *lorsqu'une droite originale est parallèle à la base horizontale du tableau, la perspective de cette ligne est aussi parallèle à la base de ce même tableau.*

Les deux lignes AB, DE (fig. 3, pl. 3), étant jointes par les droites AD, BE, formeront un rectangle AE, dont nous avons déjà la perspective de deux des côtés, AB, DE. Donc, si nous joignons les droites, dd', be', nous aurons un quadrilatère de', qui sera la perspective du rectangle AE. Les droites DA, EB, seront perpendiculaires au tableau; par conséquent dd', be', seront donc les perspectives des droites originales, qui sont perpendiculaires au tableau. Mais nous voyons que ces deux lignes ne sont pas également situées par rapport à la base du tableau, car dd' est perpendiculaire à cette base, tandis que be' est évidemment inclinée à cette même base. Nous allons examiner pourquoi cette différence a lieu, ce qui exige un peu d'attention.

Nous voyons d'abord que la droite AD, fig. 1, 2, pl. 5, étant dans le plan central, le triangle DAC sera aussi dans ce plan; par conséquent il sera dans une position verticale; ce triangle coupera donc le tableau selon la droite Ad', perpendiculaire à sa base. Cette ligne étant prolongée sera donc la trace d'un plan perpendiculaire au plan objectif (lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la commune section. *Géométrie descriptive*) qui passera nécessairement par le point de vue; ainsi la droite Ac' contiendra la projection verticale du triangle DcC, et l'intersection de ce triangle DAC avec le tableau sera la droite Ad', perspective de AD; cette ligne tendra donc au point de vue c'. Voyons maintenant la droite BE, qui est aussi la base d'un triangle EBC, qui ne se trouve pas comme le premier, dans un plan perpen-

diculaire au plan objectif, car la base EB est hors du plan central, et le sommet C est situé dans ce même plan central. Ce triangle sera donc un plan incliné au plan objectif et perpendiculaire au tableau; par conséquent sa projection horizontale sur le plan objectif sera le triangle EB*c*, et sa projection verticale dans le tableau sera la droite b*c*′, fig. 3, pl. 3, et B*c*′ (fig. 1, 2, pl. 5); et comme l'intersection b*e*′ fait partie de b*c*′, cette perspective b*e*′ sera aussi dirigée vers le point de vue *c*′, ainsi que l'est d*d*′. Et, comme il en serait de même de toute autre droite perpendiculaire au tableau, nous pouvons en conclure que *les perspectives de toutes droites perpendiculaires au tableau sont dirigées vers le point de vue.*

Nous venons de voir que les perspectives de toutes les droites qui sont parallèles à la base du tableau horizontal sont aussi parallèles à cette même base verticale, ou du tableau perspectif, et par conséquent n'ont pas de point de concours, comme celles dont les droites originales (ainsi que nous venons de le voir) font un angle droit avec le tableau, et qui concourent au point de vue. Voyons maintenant quel serait le point de concours des perspectives dont les originales feraient un angle quelconque avec la base du tableau.

Soit AB la droite donnée (fig. 1, 2, pl. 6, et fig. 1, pl. 7), faisant avec BC, base horizontale du tableau, un angle ABC, de 45°. La perspective de cette ligne sera *a*′b, ou *a*′B, laquelle étant prolongée rencontrera l'horizon en un point *d*′ qui sera le point de concours des perspectives dont les originales seront parallèles à AB. Nous devons facilement voir que la droite originale AB sera la base d'un triangle scalène ABE (fig. 2, pl. 6, et 1, pl. 7), formé par cette ligne et par les rayons AE, BE; ce triangle aura donc sa base sur le plan horizontal, son sommet à l'œil du spectateur; il sera incliné aux deux plans de projection, et coupera le tableau selon la droite *a*′B. La projection verticale de ce triangle sera dans le

tableau le triangle Ce'B. (*Voyez* les fig. G, G·, où ce triangle est dégagé de toutes les lignes de construction). Nous savons qu'un triangle quelconque peut toujours être considéré comme étant la moitié d'un quadrilatère; donc si par E, nous menons une droite parallèle à BA, et une autre AF, parallèle au rayon BE, nous aurons un plan quadrilatère AE, double du premier triangulaire ABE, et qui sera divisé en deux parties égales par la diagonale ou le rayon AE. Puisque le côté EF est à la hauteur de l'œil, il rencontrera nécessairement le plan du tableau (supposé prolongé s'il est nécessaire) à un point d', de l'horizon; donc l'intersection entière du plan AB avec le tableau, sera la droite d'B; donc b' sera le point de fuite de la droite AB, et par conséquent celui de toutes les droites qui seraient parallèles à cette ligne (fig. H, H·).

Concevons des perpendiculaires abaissées des points E, F, sur le plan horizontal ou objectif; nous aurons les points e, f, pour les projections de E et de F. Menons les droites eB, ef, fA; nous aurons le quadrilatère fB, ou Ae, pour la projection horizontale du plan incliné AE. Les droites FE, fe, avec les perpendiculaires Ee, Ff, formeront un rectangle eF, ou fE, qui passera par ces perpendiculaires Ee, Ff; par conséquent ce plan sera vertical, ou perpendiculaire au plan horizontal, et coupera le plan du tableau (prolongé s'il est nécessaire) selon la droite dd'. (fig. I, I·). Observons que les droites Ed', ed, étant parallèles à AB, ces lignes feront donc aussi avec le tableau un angle de 45°; donc Ee' égale $e'd'$. Mais Ee' est le rayon principal, ou la distance de l'œil au tableau; donc nous pouvons considérer d' comme étant le point de distance transporté sur l'horizon du tableau, de e' en d'. Donc *les perspectives de toutes les droites objectives et horizontales faisant un angle de 45° avec le tableau, concourront au point de distance.*

Nous avons déjà vu que les perspectives des droites qui font un angle droit avec le tableau, étaient dans la direction du point

de vue; nous venons de voir que les perspectives des droites faisant un angle de 45°, tendaient au point de distance; il ne nous reste plus qu'à voir quelle serait la direction des autres droites, faisant avec le tableau un angle quelconque. Nous devons facilement entrevoir que si la droite originale faisait avec le tableau un angle plus grand que 45°, son point de concours se trouverait sur l'horizon, entre le point de vue et celui de distance, et que si cet angle était plus petit que 45°, le point de concours serait au-delà du point de distance. (Ces nouveaux points de concours sont nommés *points accidentels.*) Ainsi, *la perspective d'une droite horizontale faisant un angle quelconque avec le tableau, aura son point de fuite sur l'horizon, à l'intersection du tableau avec un plan qui passerait par cette droite et par l'œil.*

Si nous nous sommes occupés spécialement des droites faisant avec le tableau des angles droits, et de 45°, ce n'est pas que ces lignes fassent une exception à la règle générale que nous venons d'exposer, mais c'est parce que ces deux cas que nous avons distingués particulièrement nous serviront beaucoup par la suite, à abréger les opérations de la perspective. Nous avons déjà vu (fig. 3, pl. 3, et fig. 1, 2, pl. 5) que le rayon principal (qui est toujours perpendiculaire au tableau) était nécessairement parallèle aux droites perpendiculaires à ce même tableau, et que l'intersection de ce rayon avec le tableau ou le point de vue, était le point de fuite ou de concours de toutes ces droites. Nous voyons ici que le point de concours des droites faisant un angle de 45° avec le tableau, est à l'intersection du tableau et d'une droite E*d'*, parallèle à AB, menée de l'œil à ce tableau. Et comme il en serait de même de toute autre ligne faisant un angle quelconque avec ce même tableau, il s'ensuit que : *le point de concours des droites horizontales, formant un angle quelconque avec le tableau, est à l'intersection d'une parallèle à ces mêmes droites, menée de l'œil au tableau.*

Il suit de ce qui vient d'être dit, que pour avoir le point de concours d'une droite horizontale, faisant un angle quelconque avec le tableau, il nous suffira de mener de l'œil à l'horizon une droite parallèle à la ligne originale. Ou bien, ce qui est la même chose, par *e*, projection horizontale de l'œil E, menons à la base du tableau une droite *e*d, parallèle à BA; et de l'intersection d, élevons une verticale qui coupera l'horizon en *d'*, qui sera le point cherché.

Nous venons de dire que les droites qui formaient, avec le tableau, des angles droits et de 45°, nous seraient très utiles pour abréger les opérations de la perspective; afin de ne pas perdre de vue cet objet, nous allons provisoirement en donner un exemple. Fig. 2, soit le carré horizontal ABCD, dont la perspective *a*bc*d*, a été trouvée par un des moyens quelconque que nous connaissons. Nous pouvons voir d'abord que les côtés de cette figure sont situés conformément aux principes que nous venons d'exposer, c'est-à-dire que le carré original a deux de ses côtés AD, BC, parallèles à la base horizontale du tableau; ainsi, dans la perspective, les deux côtés correspondans *ad*, bc, sont restés parallèles à la base du tableau vertical, les côtés AB, CD, sont perpendiculaires au tableau, les côtés *a*b, c*d*, concourent au point de vue *e'*, les diagonales BD, CA, forment, à droite et à gauche, avec la base du tableau, chacune un angle de 45°, leurs perspectives b*d*, c*a*, concourent aux points de distances E', E', éloignés chacun de *e'*, de la distance C*e*, de l'œil au tableau. Faisons abstraction, pour le moment, de tout ce que nous venons de dire, et ne nous occupons que de chercher la perspective du seul point A. De ce point abaissons sur la base du tableau une perpendiculaire AB, qui sera la distance de A, au tableau; ainsi nous voyons que A est situé sur une perpendiculaire au tableau, que cette ligne est éloignée du plan central, de la distance AD, ou BC. Nous porterons cette distance CB, sur la base du

34

tableau vertical de c, en b; de ce point nous mènerons la droite be', qui sera la direction indéfinie de la droite, sur laquelle doit se trouver la perspective de A. Maintenant portons AB, distance de A, au tableau, sur la base horizontale de B, en C, et sur la base verticale de b, en c; nous aurons CB égale AB, ou la moitié d'un carré; et cb sera la projection verticale de CB. Mais C, étant l'extrémité de la diagonale CA, laquelle coupe BA, au point A, c, sera aussi celle de la diagonale perspective, qui doit couper be', en a, qui sera le point cherché. Or, nous savons que cette ligne doit être dans la direction du point de distance; menons donc la droite cE′, et l'intersection a sera le point que nous cherchons. Cette opération si simple est beaucoup plus longue à décrire qu'à faire, ce que va nous confirmer un second exemple. Nous aurions pu nous passer de la projection horizontale, mais nous aurions craint de paraître trop abstraits, et par là de n'être pas suffisamment entendus.

Nous allons chercher la perspective d'un point original, que nous nommerons F, et qui doit être situé à 35 mètres du plan central, et à 63 de la base du tableau (échelle d'un millimètre pour mètre). Portons 35 mètres sur la base du tableau de c en f; menons la droite fe'; portons 63 mètres de f en b; menons la droite bE′, et l'intersection f de ces deux lignes sera le point cherché. Ainsi nous voyons que cette opération n'est pas longue à faire; mais les détails dans lesquels nous sommes précédemment entrés, étaient nécessaires pour en donner une connaissance suffisante, et ne pas s'en tenir uniquement à l'opération mécanique. Nous allons passer de suite à un autre exemple d'application directe des opérations qui viennent de nous occuper (fig. 1, pl. 8).

Il s'agit dans cet exemple de trouver la perspective d'un carré AB, situé dans le plan objectif, et incliné à la base du tableau sous un angle quelconque. Pour résoudre ce problème, nous

n'avons besoin que d'avoir la perspective du seul point A, que nous pouvons trouver de plusieurs manières, mais qu'il nous convient mieux ici de chercher par le nouveau moyen que nous venons d'employer. Nous voyons d'abord que ce point A est sur la trace horizontale du plan central, et à la distance $Ac^{\cdot}$, du tableau. Ainsi la perspective de A devra donc se trouver sur la droite ac'. Portons la distance $Ac^{\cdot}$, sur la base du tableau vertical de a, en $A^{\cdot\cdot}$; menons au point de distance C', la droite $A^{\cdot\cdot}C'$, et l'intersection a sera le point cherché. Nous avons donc déjà deux points de la perspective de ce carré; car B étant sur la base du tableau, b sera la perspective de ce point. Nous avons déjà vu que les intersections des droites menées de l'œil au tableau, parallèlement aux droites objectives, étaient les points de concours de ces lignes objectives. Menons donc de c, des droites parallèles aux côtés BE, BF, du carré AB : ces lignes rencontreront la base horizontale du tableau en g, et en h. De chacun de ces points élevons une verticale jusqu'à l'horizon du tableau en $g'h'$, qui seront les points de fuite cherchés, vers lesquels doivent concourir les quatre côtés du carré perspectif. Ou bien, ce qui est souvent plus juste et plus commode, portons $c^{\cdot}g$, $c^{\cdot}h$, sur l'horizon de c', en g', et de c', en h'. Nous ne devons pas négliger d'observer que nous aurions pu avoir ces deux points d'une autre manière, sans nous servir de la projection horizontale. Portons la distance $c'C'$, de l'œil au tableau, sur la trace verticale du plan central de c', en $C^{\cdot}$, et de ce dernier point, menons parallèlement aux côtés BE, BF, les droites $C^{\cdot}g'$, $C^{\cdot}h'$. Afin d'avoir une idée claire de cette dernière opération, concevons le triangle $g'C^{\cdot}h'$, tournant sur sa base $g'h'$, en avant du tableau, jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan de ce même tableau; alors nous verrons que les droites parallèles aux côtés BE, BF, sont menées directement de l'œil $C^{\cdot}$, à l'horizon aux points g', h'. Des points a, b, menons les droites indéfinies ag', bg', qui seront les direc-

tions perspectives des côtés AF, BE; menons encore les droites *ah'*, *bh'*; ces lignes seront les directions des côtés AE, BF, et les intersections ϵ, f, de ces directions perspectives seront les deux autres points des angles du carré perspectif *ab*.

Arrêtons-nous encore une fois sur la méthode par laquelle nous venons de trouver la perspective du point A, et reprenons entièrement cette opération, ce qui est essentiel. Nous concevrons donc (ce que nous avons déjà vu) un rayon allant de A à l'œil *c*: ce rayon sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont A*c* sera un des côtés, et la hauteur de l'œil sera l'autre. Couchons ce triangle dans le plan horizontal, en A*c*C : nous verrons qu'il coupera le profil du tableau selon la droite $c^{\cdot}a^{\cdot}$, qui sera la hauteur de l'intersection du rayon visuel AC, avec le tableau, et par conséquent la hauteur de *a*, perspective de A, dans le tableau. Maintenant concevons le triangle A*c*C, relevé verticalement sur sa base A*c*, et ensuite tournant sur le point $c^{\cdot}$, jusqu'à ce qu'il soit appliqué dans le plan du tableau; pendant ce mouvement, les deux extrémités A, *c*, de sa base auront décrit chacune un quart de cercle; alors le point A sera en $A^{\cdot}$, et le point *c* en $c^{\cdot\cdot}$; nous devons facilement concevoir que l'œil C doit aussi se trouver dans le plan du tableau, perpendiculairement au-dessus de $c^{\cdot\cdot}$ et à la hauteur de l'horizon ou de l'œil. Si nous faisons la projection verticale de ce triangle dans cette dernière position, nous aurons le triangle $A^{\cdot\cdot}cC^{1}$, égal et semblable au premier, et dont l'hypoténuse nous donnera également le point *a*. Cette opération nous prouve l'avantage qu'il y a d'employer ce nouveau moyen à la pratique de la perspective.

Supposons maintenant que le point A soit trop éloigné de la base du tableau pour pouvoir être indiqué sur notre papier; nous savons que dans ce cas il faut rapprocher l'objet et l'œil du tableau dans un même rapport, que nous supposerons ici être de la moitié. Ainsi, A sera en A^{3}, c en c^{3}; après le mouvement du triangle, il

sera en A^4, c^3 sera en c^4; avant le mouvement, l'œil C était en $c^{\cdot\cdot}$, et après il se trouvera perpendiculairement au-dessus de c^4, et dans le tableau vertical il sera en C^3, c^4 en c^5; enfin, nous aurons, dans la projection verticale, le triangle $A^5c^5C^3$, semblable et proportionnel au triangle $A^{\cdot\cdot}cC'$. Ainsi, en menant de A^5, moitié de la distance de A au tableau, une droite à C^3, moitié de la distance de l'œil au tableau, nous aurons également le point *a*. Nous pouvons donc avoir directement ce point dans le tableau sans faire aucune opération sur la projection horizontale. Nous allons de suite appliquer ce principe à un nouvel exemple.

Problème 3 (fig. 2). *Étant donné le tableau ab, le point de vue c et le point de distance d, trouver la Perspective d'un point original situé dans le plan objectif, sur la trace du plan central* ef, *et qui soit éloigné de cent mètres de la base du tableau, sur l'échelle d'un millimètre pour mètre.*

Prenons le dixième de la distance donnée et portons-le de e en f; prenons également le dixième de *cd*, et portons-le de *c* en *g*; menons la droite f*g*, qui coupera e*c* en *h*, qui sera le point cherché. Cherchons maintenant un autre point qui soit à une même distance de la base, et à trente mètres à droite du plan central; portons trente mètres de e en i; menons la droite i*c*, qui sera parallèle à e*c*; portons le dixième de cent ef, de i en k; menons k*g*, et l'intersection *l* sera le point demandé. Nous aurions pu avoir ce point encore plus promptement, en menant par *h*, une horizontale qui aurait coupé i*c* également au point *l*. Si nous voulons avoir un point qui soit encore à la même distance de la base, et à cent mètres à gauche du plan central; si cette distance ne peut pas être contenue dans notre papier, prenons-en une fraction, par exemple le quart, que nous porterons de e en n; menons la droite n*c*; prolongeons la droite *lh*, à gauche : cette ligne coupera la droite n*c* en *o*, et *ho* sera le

quart de la distance demandée au plan central que nous porterons quatre fois sur le prolongement de l'horizontale *lo*, jusqu'en *p*, qui sera le point requis. Cette manière d'obtenir des points qu'on ne peut pas avoir directement, est d'un grand secours dans une infinité d'occasions, et d'un fréquent usage. Nous devons voir que ces opérations sont fondées sur les propriétés des proportions, dont nous avons parlé. Ainsi, nous ferons bien de nous les rendre familières, en nous y exerçant beaucoup.

Soient AB, CD, EF, GH (fig. 1, pl. 9 et fig. 1, pl. 10), quatre droites perpendiculaires au tableau BH et bh, les perspectives de ces lignes tendront au point de vue *i'*, telles sont B*a*, D*c*, F*e*, H*g*. Si les droites originales étaient plus longues, leurs perspectives le seraient aussi; mais telle grande que nous puissions supposer leur longueur, leur perspective ne pourra jamais atteindre le point de vue, à moins que ces longueurs ne fussent infinies : ainsi B*i'*, par exemple, est la perspective d'une droite originale infinie en longueur, et ainsi des autres. Par conséquent, *les perspectives de toutes les droites situées dans un plan horizontal, ne pourront dans aucun cas dépasser l'horizon du tableau.*

Ces quatre droites peuvent être considérées comme étant les limites des plans horizontaux BC, FG, l'un au-dessus, et l'autre au-dessous du plan horizontal, niveau de l'œil du spectateur. Nous pouvons aussi considérer ces plans comme étant d'une étendue illimitée; par conséquent leurs perspectives B*c*, F*g*, ne pourront jamais dépasser l'horizon du tableau. Donc *l'horizon du tableau est la ligne de fuite, des perspectives de tous les plans horizontaux*. Nous pouvons encore concevoir ces mêmes droites originales, comme étant aussi les limites des plans verticaux BE, DG, perpendiculaires au tableau. Par les mêmes raisons que nous venons d'exposer au sujet des plans horizontaux, les perspectives des plans verticaux et perpendiculaires au tableau ne pourront jamais dépasser la trace *kl*, du plan central. Donc

la trace du plan central dans le tableau, est la ligne de fuite de tous les plans verticaux et perpendiculaires au tableau. Comme dans cet exemple, les plans verticaux, dont nous venons de parler, sont carrés, leurs diagonales, AF, BE, CH, DG, sont nécessairement inclinées au plan objectif et horizontal, sous un angle de 45°. Les perspectives de ces lignes auront leurs points de concours dans la ligne de fuite des plans verticaux qui les contiennent, ou dans la trace du plan central. Ces points *k*, *l*, seront éloignés du point de vue *i'*, de la distance I*i'*, de l'œil au tableau; de même que les droites situées dans un plan horizontal, et faisant un même angle avec le tableau, ont les leurs dans la ligne de fuite des plans horizontaux, ainsi que nous l'avons vu.

Le plan AG, étant parallèle au tableau, aura pour perspective le carré *ag*, semblable à son original, ainsi que nous l'avons déjà dit; car si nous faisons passer un plan MN, par l'œil I, et qui soit parallèle au tableau, nous verrons d'abord que ces deux plans ne pourront jamais s'entrecouper. Par conséquent les plans parallèles au tableau ne peuvent avoir des lignes de fuite, de même que les lignes parallèles entre elles contenues dans ces plans ne peuvent avoir de points de concours. Donc *les perspectives des plans parallèles au tableau, ne peuvent avoir de lignes de fuite, et seront toujours des figures semblables à leurs originaux.*

Des Lignes et des Plans inclinés à l'Horizon, ou au Plan horizontal (même figure).

La droite BE est évidemment inclinée au plan objectif horizontal; de plus cette ligne est située dans un plan vertical et perpendiculaire du tableau. D'après ce que nous avons déjà dit, sa perspective aura donc son point de fuite dans la verticale du tableau en un point quelconque *k*, qui sera plus ou moins élevé

en raison de l'inclinaison plus ou moins grande de la droite originale. La perspective de AF aura le sien en l; il en sera de même des droites CH, DG, etc.; donc *toutes les droites inclinées à l'horizon, parallèles entre elles et contenues dans des plans verticaux et perpendiculaires au tableau, auront leurs points de concours dans la ligne de fuite de ces mêmes plans ou dans la verticale du tableau.*

Soient AB, CD (fig. 2, pl. 9) deux droites objectives données; les perspectives de ces lignes seront les droites aB, cD, dont les directions tendent vers un point de concours E, qui est situé sur l'intersection du tableau avec un plan E*f*, passant par l'œil F, et qui est parallèle aux plans des triangles verticaux A*a*B, C*c*D, passant par les lignes objectives données. La droite FE est une ligne menée de l'œil au tableau (prolongé s'il est nécessaire) parallèlement aux droites données. Cette dernière ligne, qui est dans le plan *f*E, détermine sur le tableau le point de concours E des droites perspectives Ba, Dc. Nous allons voir un second exemple de ce même problème considéré d'une autre manière (fig. 1, pl. 11).

Les lignes données sont; dans cette figure, les mêmes que dans l'exemple précédent; seulement nous les supposerons situées dans un plan BC, lequel sera par conséquent incliné au plan objectif. Le plan GE passe par l'œil F, est parallèle au plan BC, et coupe le tableau dans son prolongement selon la droite HE, qui sera par conséquent la ligne de fuite de tous les plans parallèles au plan BC. La droite FE est la ligne menée par l'œil au tableau, parallèlement aux droites données. Cette ligne est dans le plan GE, mais elle est aussi dans le plan *f*E; par conséquent elle est à l'intersection de ces deux plans et rencontre le tableau en E, qui sera le point de concours cherché. Il arrive souvent que les lignes données font avec le plan objectif ou horizontal un angle plus grand que n'est celui de cet exemple; alors le point de fuite E peut se trouver tellement éloigné qu'il est impossible

d'exprimer sa position sur le papier; lorsque ce cas arrive, il faut s'y prendre d'une autre manière. Par exemple, nous chercherons les perspectives des projections horizontales B*a*, D*c*, qui seront dans le tableau B*a*′, D*c*′; par les points *a*′, *c*′, nous éleverons des verticales indéfinies sur lesquelles nous porterons les hauteurs perspectives de *a*A et de *c*C, qui seront *a*′a, *c*′c; nous mènerons les droites Ba, Dc, qui seront les lignes cherchées. Ces figures, qui sont en perspective, ne nous permettent que d'indiquer les opérations que nous venons de décrire, ce qui ne nous dispense nullement de les effectuer, ainsi que nous allons le faire (fig. 2).

Soient *a*B, *c*D les projections horizontales des droites objectives données, et l'angle *a*BA la mesure de l'inclinaison que ces droites BA, DC ont sur le plan horizontal. (Nous ne devons pas perdre de vue que ces dernières lignes sont renversées et couchées dans le plan objectif.) De *f*, projection horizontale de l'œil, menons parallèlement à B*a* ou à D*c* la droite *fe*; portons D*e* sur l'horizon du tableau de *f*′ en *e*′, qui sera le point de fuite des projections horizontales et parallèles B*a*, D*c*. Menons les droites b*e*′ d*e*′: ces lignes seront les directions perspectives et indéfinies des droites B*a*, D*c*. Observons que Dd est la trace horizontale perpendiculaire au tableau, et que cette ligne coupe la droite B*a* en *a*; par conséquent la perspective de Dd doit couper la perspective de B*a* en un point *a*′ qui sera la perspective de *a*. Comme *a*, *c* sont à égale distance du tableau, les perspectives de ces points en seront de même également éloignés; donc, en menant par *a*′ une parallèle à la base du tableau, cette ligne coupera d*e*′ en *c*′, qui sera le point cherché. De chacun des points *a*′, *c*′, élevons des verticales indéfinies; par *e* (projection horizontale) élevons à *fe* une perpendiculaire indéfinie qui sera la coupe ou le profil du tableau. Par *f*, menons une parallèle à DC ou à BA, qui coupera la perpendiculaire indéfinie ou le tableau en E, et la droite *f*E sera le rayon visuel parallèle à la droite originale BA ou DC menée de l'œil au

tableau et couché aussi dans le plan horizontal. Concevons le triangle rectangle *fe*E relevé perpendiculairement sur sa base *fe*, nous aurons l'idée de la hauteur de E dans le tableau au-dessus de l'horizon de ce même tableau. Portons donc cette hauteur *e*E dans le tableau de *e'* en E', qui sera le point de fuite des droites données. Menons les droites dE' bE', qui seront les directions indéfinies des perspectives cherchées; ces directions couperont les verticales élevées des points *a'*, *c'* en a et en c; les droites ba, dc, seront les perspectives demandées. Dans le cas où nous n'aurions pu avoir le point de concours E', après avoir trouvé les droites b*a'*, d*c'* et avoir élevé les verticales indéfinies, nous trouverons la hauteur de ces lignes, 1° en couchant dans le plan objectif la hauteur de l'œil en F, et celle de *a*A, en A·; 2° en menant ensuite le rayon A·F, qui coupera le tableau en *x*, et portant D*x* dans le tableau de d en a; de ce dernier point, nous mènerons une horizontale qui coupera la verticale élevée de *c'* en un point c; ou bien nous ferons *c*c égal à *a'*a, et nous mènerons les droites ba, dc, qui seront les lignes cherchées; ou bien encore, nous porterons la hauteur *a*A sur la base du tableau de d en *y*; nous mènerons la droite *yf'*, ainsi que l'horizontale *a*, *z*, et nous porterons *a'z*, de *a'* en a, et de *c'* en c, etc.

De la Distance la plus convenable du spectateur au tableau (fig. 1, pl. 12).

Nous savons déjà que le plus grand angle sous lequel l'œil puisse voir distinctement un ou plusieurs objets, est l'angle droit; nous pouvons donc considérer la somme des rayons qui peuvent entrer dans l'œil sous cet angle, comme formant un cône dont l'œil sera le sommet, et dont les côtés, par leur réunion à ce point, forment un angle droit. Par conséquent, l'œil ne pourra voir distinctement que les objets qui seront placés dans la base de ce cône. Ainsi

un tableau est dans ce cas. Soit AB, ab, les projections de la base d'un tableau (que dans ce cas nous supposerons carré). Pour que ce tableau puisse être inscrit dans le cercle de la base d'un cône, dont les côtés forment un angle droit au sommet, il faut que l'axe de ce cône soit égal au rayon du cercle de la base. Ainsi de c', centre du tableau, avec c'a, ou c'b, pour rayon, nous décrirons un cercle qui contiendra entièrement ce tableau. Nous porterons ce rayon dans la projection horizontale de c, en $c^{\cdot}$, et la droite $cc^{\cdot}$, sera la plus petite distance que nous puissions prendre pour voir distinctement le tableau aE.

Si nous faisons un angle droit au point de distance ou de station $c^{\cdot}$, nous aurons un triangle isocèle dont la base de, sera égale au diamètre de la base du cône, circonscrit au tableau. Cette distance $cc^{\cdot}$, qui convient pour le tableau aE, serait trop petite pour le tableau aG, qui aurait même base et plus de hauteur, ou pour le tableau aH, qui a même hauteur et plus de largeur, car nous voyons que l'un ou l'autre de ces deux derniers tableaux ne sont plus, comme le premier, contenus entièrement dans le cercle de la base du cône optique. Nous devons donc, dans ce cas, augmenter la distance de l'œil au tableau, ce que nous ferons en prenant pour rayon la distance du point de vue c', à l'angle le plus éloigné, tel que c'G ou c'H, que nous porterons dans la projection horizontale de c' en c''. Nous voyons par là que la distance doit varier en raison de la hauteur ou de la largeur du tableau. Mais, en général, il vaut mieux prendre une distance plus grande que celle-ci, qui est la plus petite que nous puissions prendre. Celle qui nous paraît le mieux convenir, est la longueur de la diagonale du tableau. L'inconvénient qui résulterait d'une trop grande distance serait que les objets situés sur les plans un peu éloignés de la base du tableau se confondraient trop. La distance plus ou moins grande dépend encore de l'élévation plus ou moins grande de l'œil au-dessus de la base du tableau. En général, plus

l'œil est élevé, plus il convient de prendre une plus grande distance. Nous pouvons voir dans cette figure les différences que présente un même carré, vu de plusieurs distances. Soit un carré dont le côté soit ab, et dont la diagonale a*i*, est dirigée vers *e'*, point de la plus petite distance *cc'*. Le carré ak est vu de la distance *cc''*, ou *c'f'*. Enfin, le carré a*l*, est vu de la troisième distance cc^3, ou *c'n'*, qui est égale à la diagonale aE, du premier tableau. Ainsi, nous voyons qu'un même carré peut paraître plus ou moins bas en raison d'une distance plus ou moins grande.

La droite de, projection horizontale du tableau, selon la diagonale aE, ou le diamètre *d'e'*, est, dans cet exemple, vue successivement sous différens angles; d'abord sous l'angle droit d*c'*e, ensuite sous les angles aigus d*c''*e, dc^3e, etc. L'expérience seule fera connaître la distance qui conviendra le mieux dans tel ou tel cas. Nous venons de voir les changemens qu'éprouve l'apparence d'un objet vu à des distances plus ou moins grandes, nous allons voir maintenant que ces mêmes changemens peuvent aussi avoir lieu, quoique l'objet soit vu d'une même distance au tableau; cela dépend de l'élévation plus ou moins grande de l'œil, relativement à cet objet et au tableau (fig. 2).

Soit le tableau ab, vu de la distance *cd*. Prenons, comme dans l'exemple précédent, la base ae, pour côté d'un carré, la perspective de ce carré sera le carré a*f*; maintenant, descendons l'horizon jusqu'en *c'd'*, la distance sera évidemment la même, et l'apparence du même carré, dans ce second cas, sera le carré a*f'*.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que, dans la perspective d'un ou de plusieurs objets, nous devons avoir égard, non-seulement à la distance de laquelle ces objets doivent être vus, mais encore à l'élévation plus ou moins grande de l'horizon, ou, ce qui est la même chose, à celle de l'œil. Ainsi, la hauteur de l'horizon dans le tableau dépend du plus ou moins de développement que l'on veut avoir dans les objets que l'on se propose

de mettre en perspective. Mais, en général, la position la plus avantageuse, est lorsque l'horizon se trouve à peu près au tiers de la hauteur du tableau, comme dans cet exemple. D'ailleurs, l'expérience fera sentir, à ce sujet, tout ce qu'il est impossible de dire. Ce que nous avons vu jusqu'ici renferme tous les principes de la perspective. Nous allons tâcher d'en faire l'application à la résolution de plusieurs problèmes (fig. 1, pl. 13).

Problème 4. *Étant donnés* 1° *la Distance au tableau;* 2° *le Côté perspectif d'un carré, terminer ce carré sans se servir de la projection horizontale.*

Nous allons commencer la résolution de ce problème par les cas les plus faciles. Soit *ab* le côté donné. Puisque ce côté est parallèle à la base du tableau, les côtés latéraux de ce carré sont perpendiculaires à cette même base; par conséquent, ces côtés doivent concourir vers le point de vue c'. Menons donc les droites indéfinies ac', bc', et, en conséquence de la position de ce carré par rapport au tableau, la diagonale sera inclinée de 45°, sur la base de ce même tableau ou sur le côté *ab*; or, nous savons qu'une ligne inclinée sous cet angle doit tendre au point de distance; menons donc la droite *ac*, qui coupera bc' en un point *d*, ce qui nous donnera *bd* égal à *ba*; et, comme le côté *de* est parallèle à *ab*, ou à la base du tableau, cette ligne qui doit rester parallèle à cette même base, sera terminé en *e*, par la droite ac', et nous aurons le carré *ad* ou *be* demandé.

Soit donné maintenant le seul point *f*, pour le sommet de l'angle d'un carré, d'une grandeur quelconque, mais dont la diagonale doit être perpendiculaire au tableau : la direction de cette ligne devra donc tendre au point de vue c', et sur cette ligne fc', direction de la diagonale, prenons à volonté un point tel que *h*, et *fh* sera la diagonale perspective du carré que nous nous proposons de faire. Puisque cette diagonale est perpendiculaire au

tableau, les côtés du carré seront inclinés de 45°, sur la base de ce même tableau; les directions de ces côtés doivent donc concourir vers les points de distance cc′; menons les droites *fc*, *fc*′, qui seront les directions des côtés **FG**, **FI** (projection horizontale); nous mènerons ensuite les directions c*h*, c′*h*, prolongées jusqu'à leur rencontre avec les premières aux points *g*, *i*, et le carré *fh* ou *gi* sera terminé. Quoique nous n'ayons pas eu besoin de recourir à la projection horizontale, nous avons néanmoins jugé à propos de l'insérer ici, afin de mieux nous rendre compte de cette opération, ainsi que nous allons le faire dans l'exemple suivant (fig. 1, pl. 14), ou même que dans le premier exemple, nous allons nous proposer de déterminer la perspective d'un carré dont un seul côté est donné, faisant un angle quelconque avec la base du tableau. Ce problème, qui semble d'abord si peu différent du premier, ne laisse pourtant pas de présenter quelques difficultés, ce qui nous fera sentir l'avantage qu'il y a de recourir, dans certains cas, aux moyens indirects, cas qui se rencontrent assez fréquemment dans la pratique.

Soit a*b*, le côté donné; prolongeons ce côté jusqu'à l'horizon en *c*′; portons la distance de l'œil au tableau dans le prolongement du plan central de *d*′ en D, et menons la droite *c*′D, qui sera parallèle au côté a*b*, ou à son original AB; pour bien comprendre ceci, nous allons nous aider de la projection horizontale. Rappelons-nous de quelle manière nous avons trouvé le point de fuite d'une droite donnée; par exemple, nous voulons avoir ce point pour le côté AB: par l'œil horizontal *d*, menons une parallèle à AB, qui coupera le tableau en c; portons dc sur l'horizon de *d*′, en *c*′, et *c*′ sera le point demandé, ou le même que nous avions déjà trouvé, mais sans trop savoir comment. Concevons ou supposons le triangle *d*cd, tournant sur sa base cd jusqu'à ce qu'il soit relevé verticalement dans le plan du tableau. Ensuite faisons la projection verticale de cette supposition, au-dessus de l'hori-

zon, nous aurons le triangle D$c'd'$. Concevons maintenant ce dernier triangle tournant sur sa base $c'd'$, jusqu'à ce qu'il soit ramené en avant dans le plan de l'horizon. Lorsqu'il sera dans cette position, sa projection horizontale sera la même que le triangle $d$cd; donc, D, c' est parallèle à AB ou à ab. Nous pouvons, par ce moyen, nous passer de la projection horizontale pour la résolution de ce problème. Nous avons donc c' pour point de fuite des côtés ab, ef, parallèles entre eux; mais comme nous n'avons aucun des points de ce dernier côté, nous ne pouvons pas encore le tracer directement; cherchons le moyen d'y parvenir indirectement.

Nous avons le point a, qui appartient aussi au côté ae; il ne nous reste donc qu'à trouver le point e; pour y parvenir, cherchons d'abord le point de fuite du côté ae, en menant par l'œil D une parallèle à ce côté. Mais comme nous n'apercevons pas d'abord le moyen de le faire, nous allons nous aider en consultant encore la projection horizontale. Par d, menons la droite dg, parallèlement à AE; cette ligne, par son intersection avec le tableau, doit nous donner le point de fuite de ae, comme nous avons eu celui de ab, qui est c'. Mais il se rencontre ici un obstacle, qui est que dg rencontrerait le prolongement du tableau beaucoup trop loin, pour les dimensions de notre papier; il nous faut donc trouver encore un autre moyen. Cherchons d'abord la projection verticale de dg, que nous pouvons trouver sans nous servir de la projection horizontale, qui nous est interdite par l'énoncé du problème. Raisonnons donc ainsi : le côté ae, quel qu'il soit, doit faire un angle droit avec le côté ab, que nous connaissons; et comme c'D est parallèle à ce côté, faisons donc en D un angle droit c'Dg', dont le côté Dg' doit être parallèle au côté ae, que nous n'avons pas encore, et dont la direction serait déterminée par le point d'intersection de Dg' avec l'horizon. Mais nous voyons que l'inconvénient que nous avons déjà rencontré se retrouve encore ici,

savoir, que le point d'intersection ne peut être contenu dans notre papier. Continuons donc notre raisonnement en disant : la diagonale af doit diviser l'angle droit bae en deux parties égales ; par conséquent, si nous divisons l'angle droit c'Dg' en deux parties égales par la droite Dh', cette ligne sera parallèle à la diagonale que nous cherchons ; donc h' sera le point de fuite de la diagonale af, dont nous aurons la direction, en menant la droite ah'. Il s'agit maintenant de déterminer la longueur de af. Nous savons que les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement entre elles ; par conséquent, si nous menons à h'D une perpendiculaire Di$'$, prolongée jusqu'à l'horizon, le point d'intersection i' sera le point de fuite d'une perpendiculaire à ah', et par conséquent de la direction de la seconde diagonale, qui doit passer par le point b; menons donc par les points $i'b$ une droite indéfinie qui sera la direction cherchée. Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer sur ces directions les longueurs des deux diagonales, et nous n'avons encore aucun moyen direct pour le faire. Si par k, centre du carré, nous menons une droite indéfinie parallèle à la base du tableau, que nous considérerons comme étant une sécante qui doit diviser le carré en deux parties égales, et qui sera elle-même divisée en deux parties égales par deux des côtés du carré et par le centre k; et comme nous connaissons la moitié de cette ligne, qui est kl, portons cette longueur de k en m, et m sera un point appartenant au côté du carré opposé à ab. Menons donc une droite indéfinie passant par m et par c'; cette ligne sera coupée par les directions diagonales aux points e, f, et le carré sera déterminé.

Cette opération, qui est bientôt faite, est très longue à décrire d'une manière propre à la faire bien concevoir aux commençans. Quoique ce problème ne soit pas des plus expéditifs ni des plus commodes dans la pratique, nous ne devons cependant pas le négliger, parce qu'il nous familiarise avec les moyens indirects

qui sont fréquemment d'un grand secours. Plusieurs des auteurs qui ont écrit sur la perspective ont prétendu que, par le moyen de la méthode que nous venons d'employer, on pouvait se passer de la projection horizontale dans la pratique de cette science, et que par là on s'épargnait beaucoup de travail et de temps, ce qui a fait croire à la plupart des artistes, qu'il n'était pas nécessaire de connaître la géométrie ni les projections, opinion erronée qui est cause qu'un grand nombre d'entre eux se sont trouvés privés de la connaissance indispensable de cette science, et que tous les ouvrages qui traitent de la perspective n'ont jamais pu être à leur portée. Il est pourtant vrai de dire que cette méthode (de se passer de la projection horizontale ou du plan) serait très avantageuse à celui qui la posséderait bien, et qui aurait toujours présens à la mémoire les détails de dimensions et de positions de tous les objets qu'il se propose de mettre en perspective, et qui de plus aurait une parfaite connaissance de la science des projections, ce qui est absolument indispensable. Or, c'est ce qui est à peu près physiquement impossible, surtout si un dessin est très compliqué, ce qui arrive le plus souvent. Donc, etc., etc. D'ailleurs, nous allons résoudre le même problème en nous servant de la projection horizontale, et nous verrons que cette opération nous paraîtra beaucoup plus facile, moins abstraite, et nous confirmera ce que nous avons déjà dit, qu'on peut souvent se tirer d'un cas embarrassant, en sachant trouver à propos la perspective d'un point.

(Fig. 1, pl. 15). Soit a*b* le côté donné que nous prolongerons jusqu'à l'horizon, ce qui nous donnera le point de fuite c'; prolongeons le côté FE jusqu'à la base du tableau en n; portons dn, sur le tableau de d· en n·; de ce dernier point, menons la droite n·c', qui sera la direction du côté opposé à a*b*; cherchons les points *e*, *f*, comme nous les avons trouvés jusqu'ici, c'est-à-dire, en

prenant par exemple la distance de F à la base du tableau horizontal en o; portons Fo sur la base du tableau perspectif de o· en P, et menons au point de distance la droite PD, qui coupera n·c′ en *f*, et nous mènerons *bf* : nous en ferons autant pour E, nous aurons le point *e*; nous mènerons la droite a*e*, et le carré sera terminé.

Problème 5. *Diviser une droite donnée en perspective, suivant une proportion quelconque.*

(Fig. 2, pl. 13.) Soit la droite AB ou B*c*, à diviser en un nombre de parties quelconque égales ou inégales, par exemple, en deux parties égales. Nous avons déjà vu que les figures qui sont parallèles au tableau ont pour perspective des figures qui leur sont semblables. Par conséquent, une droite qui sera dans ce cas et qui sera divisée en parties égales, aura ses parties en apparence (ou en perspective) aussi égales entre elles; tel est le cas de la droite AB, ainsi que de toutes celles qui lui seraient parallèles; d'où il suit que si nous divisons AB en deux parties égales, AD sera égale à DB, et cette égalité nous paraîtra aussi telle dans toute ligne parallèle à AB, à quelque distance qu'elle soit de la base du tableau. Mais il n'en sera pas de même de la droite B*c*, qui est réellement divisée en deux parties égales au point *e*, et cependant ses parties nous paraissent inégales. Si par A, et par *c*, nous menons une droite prolongée jusqu'à l'horizon, le point d'intersection *f* sera le point de fuite de toutes les droites parallèles à A*f*; donc, si nous menons les droites D*f*, B*f*, ces trois lignes seront parallèles entre elles; donc, les droites AB, B*c* sont comprises entre les parallèles A*f*, B*f*: or, les deux lignes AB, B*c* sont coupées par une troisième parallèle D*f*; donc, leurs parties sont proportionnelles entre elles; donc, si AD est la moitié de AB, *ce* sera la moitié de *c*B. Il en serait de même si la droite donnée

était dans un plan vertical, comme est la droite bc, divisée en deux parties égales au point e'. Il suit de ce qui vient d'être dit, que le problème se réduit à ceci : si la droite proposée est située dans un plan parallèle au tableau, nous la diviserons simplement à l'ordinaire, selon le nombre demandé, et lorsqu'elle fera un angle qnelconque avec le tableau, tel que Bc, cb, gh, etc., nous mènerons par l'une des extrémités de cette ligne, une droite parallèle à la base du tableau, si cette droite est située dans un plan horizontal, ou bien parallèlement au côté latéral du tableau, si la droite donnée est située dans un plan vertical. Nous diviserons cette ligne parallèle à la base ou au côté du tableau, selon le nombre demandé. Par la dernière division, et par l'autre extrémité de la droite donnée, nous mènerons une droite jusqu'à l'horizon ; et par chacune des autres divisions, nous mènerons des parallèles perspectives à cette dernière ligne. Exemple, soit la droite gh à diviser en trois parties égales. Par g, menons une droite indéfinie parallèlement à la base du tableau ; portons sur cette ligne trois fois une ouverture de compas, prise à volonté ; par la dernière division et par h, menons une droite $3h$, qui coupera l'horizon en i, qui sera le point de fuite des droites $2i$, $1i$, etc., et gh sera divisée perspectivement en trois parties égales. Si la droite donnée était à la fois inclinée au tableau et au plan objectif, comme est AB (fig. 3), nous serions obligés de diviser d'abord Ab, projection horizontale de cette ligne, et par chacun des points de division, nous éleverions des verticales à AB qui se trouverait divisée selon notre intention.

Problème 6. *Par un point a donné dans le tableau, mener une droite parallèle à la base ou au côté du tableau, et qui soit perspectivement égale à une autre droite* AB *aussi donnée* (fig. 4).

Soit a, le point donné ; menons par ce point une droite indéfinie parallèle à la base ou au côté du tableau. Il s'agit maintenant

de déterminer sur l'une ou l'autre de ces lignes, une longueur égale à AB. Par *a*, menons à volonté une droite qui coupe la base du tableau en a, et l'horizon en *c*; portons la longueur AB de a en *b*, et menons b*c*, qui coupera la droite horizontale menée par *a*, en un point *b*, ce qui nous donne *ab* égal AB. Il en sera de même pour la droite *ab'*, parallèle au côté du tableau, qui sera égale à *ab*. Nous pouvons, par ce moyen, trouver facilement la hauteur d'une figure, à une distance quelconque de la base du tableau. Ex. : soit *e*, un point donné à volonté sur le plan objectif, pour le pied d'une figure dont nous voulons connaître la hauteur relativement à sa distance du tableau. Considérons d'abord AB, ab, ou ab', comme étant la grandeur réelle de la figure proposée. Menons par *e* une horizontale, qui coupera les parallèles a*c*, b*c*, aux points *f*, *g*; la droite *fg* sera la hauteur cherchée, que nous porterons verticalement au-dessus du point *e*; ou bien du point d'intersection *g*, élevons une verticale qui nous donnera le point *h*, et la droite *gh* sera également la hauteur de la figure cherchée, car *gh* égal *hg*.

Problème 7 (fig. 2, pl. 15). *Mettre en perspective dans un rapport quelconque, une figure donnée en projection horizontale, et construite sur une petite échelle.*

On a souvent besoin de mettre en perspective des plans ou cartes, qui représentent une très grande étendue de terrain, et en conséquence, sont construits sur une très petite échelle. Si nous voulions représenter ces objets en perspective, d'après cette échelle, nous pourrions avoir un tableau qui n'aurait que quelques lignes de base, et par conséquent sur lequel il nous serait physiquement impossible d'opérer. D'un autre côté, si nous voulions mettre ces plans ou cartes à l'échelle du tableau que nous nous proposons de faire, nous pourrions avoir une carte de plusieurs

toises d'étendue, ce qui ne présenterait pas moins d'inconvéniens, et de plus multiplierait extraordinairement le travail. Il nous faut donc chercher un moyen par lequel nous traduirons de suite ce dessin sur une plus grande échelle, en même temps que nous le mettrons en perspective. La plupart des auteurs qui ont écrit sur la perspective, ont proposé, pour ce cas, un moyen très connu des artistes, sous le nom de *treillis*, ou *carreaux perspectifs*, et qui consiste à couvrir le plan ou dessin original de petits carreaux en nombre quelconque, à faire sur un papier un même nombre de carreaux perspectifs plus grands, selon l'échelle proposée, et de dessiner à vue les lignes que l'original contient. Ce moyen, qui paraît d'abord très simple, est tout-à-fait impraticable, tant à cause de l'irrégularité des carreaux perspectifs, que du rétrécissement que ces carreaux éprouvent à mesure qu'ils s'éloignent de la base du tableau, et parce qu'à une distance assez médiocre de cette base, ils sont déjà tellement serrés, qu'ils ne peuvent plus être d'aucun secours; de plus ils couvrent le papier d'un si grand nombre de lignes, qu'il n'est plus possible de s'y reconnaître. D'ailleurs, il peut arriver que le dessin original ne contienne que des lignes courbes irrégulières (telles que dans cet exemple) que l'on ne peut déterminer que par un nombre plus grand ou moins grand de points. Pour déterminer avec quelque précision, la position de ces points, il faut nécessairement employer plusieurs lignes, ce qui augmente la confusion à un tel point, qu'il n'est plus possible de continuer l'opération. Voici le moyen qui nous a paru le plus facile, le plus simple, en un mot, le plus propre à remplir le but que nous nous proposons ici, et qui est exempt des inconvéniens que nous venons d'exposer; il ne nous faut seulement que de la patience, de l'attention, et surtout beaucoup de précision.

Soit *a*, l'endroit où est placé un spectateur regardant vers l'embouchure d'une rivière qui a environ vingt-cinq mètres de lar-

geur; l'espace *a* 16, du spectateur au bord de la mer est de 686 mètres; le tableau *bc* a 100 mètres de base, et la distance *ae* du spectateur au tableau est de 86 mètres. Nous devons facilement voir qu'il nous serait impossible d'opérer sur une aussi petite échelle, et que si ce dessin était sur une échelle seulement cinq fois plus grande de quelle étendue il serait, et par conséquent combien seraient multipliées les difficultés à chaque point perspectif qu'il nous faudrait trouver. Soit *oa* 32, l'angle optique sous lequel nous voyons la portion de terrain comprise entre ses côtés. Par un point éloigné du spectateur tel que 16, menons une parallèle au tableau que nous diviserons à volonté en parties égales; par chacun des points de division, nous mènerons une droite à l'œil *a*. Nous considèrerons ces lignes comme étant les traces horizontales d'autant de plans verticaux passant par l'œil du spectateur, et coupant le tableau. Nous avons déjà vu (*Géométrie descriptive*) que lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la commune section des deux plans. Or, la base *bc* est cette commune section; donc les traces verticales de tous ces plans dans le tableau, seront autant de perpendiculaires à la base de ce même tableau. Soit maintenant bc (fig. 1, pl. 16), la base du tableau vertical sur une échelle cinq fois plus grande que *bc*; nous diviserons cette base en autant de parties que nous aurons mené de plans verticaux à l'œil *a*, et par chacun des points de division, nous éleverons une perpendiculaire; nous aurons soin de numéroter toutes ces lignes dans le même ordre que celui de la projection horizontale, ensuite nous déterminerons l'horizon selon le plus ou moins de développement que nous voudrons avoir.

Sur un papier à part (fig. 3, pl. 15), nous mènerons une droite indéfinie sur laquelle nous éleverons une perpendiculaire aA, que nous ferons égale à la hauteur de l'horizon du tableau vertical.

Nous prendrons sur la projection horizontale la distance *ae*, du spectateur au tableau, que nous porterons (fig. 3) de *a* en *e*; de ce point nous éleverons une perpendiculaire *ef* égale à *a*A, cette ligne sera le profil du tableau. Ensuite, nous prendrons (fig. 2) la distance du premier point *i*, au tableau qui se trouve sur la trace n° 16 de *i* en *e*, que nous porterons (fig. 3) de *e* en *i*; nous mènerons le rayon visuel *i*A, qui coupera le tableau en *i'*; nous porterons *ei'* sur le tableau vertical de a en *i*, qui sera le premier point perspectif cherché. Cette opération est facile à conçevoir, car Af (fig. 3) n'est que le cinquième de la distance du spectateur au tableau, et la longueur *ei* n'est aussi que le cinquième de la distance de *i* au tableau, selon l'échelle de cette figure, ces deux lignes sont en rapport. Nous devons observer de porter *ei'*, dans le tableau vertical de a en *i*; nous aurions pu également porter *fi'* dans ce même tableau de 16 en *i*, ce qui est plus commode. Il en sera de même de tous les autres points. Nous savons que les points *g*, *h*, de la projection horizontale étant sur la base du tableau, sur les traces 5 et 14, seront dans le tableau en *g*, *h*, sur les verticales des mêmes numéros. Dans le cours de l'opération, nous serons obligés de renouveler plusieurs fois le profil de la fig. 3, parce que le tableau *ef* se trouvera inévitablement coupé par la quantité des points de compas. Sur la projection horizontale, nous prolongerons à droite et à gauche la base du tableau afin d'avoir plus facilement la distance des différens points, tel que *k*, au tableau. Nous pouvons obtenir les distances de ces points sans mener aucune ligne; par exemple, nous poserons une des pointes du compas sur *k*, et avec l'autre nous décrirons un arc, en ouvrant plus ou moins le compas jusqu'à ce que cet arc soit tangent au tableau en *l*, et la droite *lk* sera la distance cherchée, que nous porterons sur le profil, de même que nous avons fait pour le point *i*. Nous devons aussi,

pour éviter la confusion, lier les points les uns aux autres, à mesure que nous les trouverons, par un léger trait de crayon.

Problème 8. *Construire la perspective d'une suite de carreaux, dont l'un des côtés est parallèle à la base du tableau* (pl. 17).

La projection horizontale de cette figure est avec le tableau vertical, dans le rapport de trois à un, ce que nous avons fait pour économiser la place. Soient les seize carreaux compris dans l'espace ABDC, dont il s'agit de trouver la perspective dans le tableau a*y*. Nous voyons d'abord que la base AB comprend quatre carrés; par conséquent, nous diviserons la base, ab, en quatre parties égales, et les points a, e, f, g, b, seront les projections verticales de AEFGB. Menons les droites a*h*′, e*h*′, f*h*′, g*h*′, b*h*′ : ces lignes seront les directions perspectives des droites AC, EZ, etc., qui sont perpendiculaires à la base du tableau. Observons que la diagonale AD coupe la première perpendiculaire qu'elle rencontre, ainsi que la première parallèle en un point *i*, de même que les suivantes aux points *j*, *k*, D, etc., s'il y en avait davantage. Cette diagonale, étant inclinée de 45° sur la base AB, doit avoir son point de fuite dans le tableau, sur l'horizon, au point de distance H′. Menons la droite aH′, qui coupera les perpendiculaires aux points *i*′, *j*′, *k*′, *d*′, correspondans aux points *i*, *j*, *k*, D; nous voyons que par chacun de ces derniers points, il passe une parallèle à AB; menons donc dans le tableau, par les points *i*′, *j*, etc., autant de parallèles à ab, qui détermineront les seize carreaux contenus dans le carré AD. Si nous voulions avoir en profondeur le double de ces carreaux, par *c*′, situé à l'angle du dernier carré à gauche du tableau, menons la droite *c*′H′, qui sera parallèle à aH′, et coupera les prolongemens des perpendiculaires aux points *n*, etc. Par chacun des points d'intersection, nous mènerons autant de nouvelles parallèles qui détermineront autant de carrés que nous

en avons déjà trouvés, et ainsi de suite, si nous en voulions davantage. Remarquons que le champ du tableau, à droite et à gauche, n'est pas rempli par ces trente-deux carreaux, ainsi que ces mêmes espaces le sont dans la projection horizontale par les carreaux et parties de carreaux compris sous l'angle optique l*h*m. Nous devons facilement voir qu'il faut porter à droite et à gauche du tableau vertical, sur les prolongemens de la base ab, et autant que l'espace nous le permettra, la longueur de l'un des carreaux, comme de a en n, en o, etc., et par chacun de ces points mener des droites à *h′*, qui couperont les prolongemens des parallèles, et par leurs points d'intersection détermineront autant de carreaux. Mais comme nous ne pouvons pas toujours prolonger la base du tableau autant qu'il serait nécessaire pour compléter le nombre de carreaux suffisant pour remplir les espaces vides, il nous faut chercher le moyen d'y suppléer. Pour y parvenir, remarquons que les côtés des carreaux qui sont sur une même parallèle, sont et doivent toujours être égaux entre eux; par conséquent, nous n'avons qu'à porter sur le prolongement de l'une quelconque de ces parallèles, les longueurs de l'un des côtés des carreaux qu'elle contient, comme *nc′*, de *c′* en *s*, en *t*, en *v*, etc., et par chacun de ces points mener des droites à *h′*. Nous devons bien sentir que, pour résoudre ce problème, nous pouvons nous passer de la projection horizontale, qui n'est ici que pour faciliter l'intelligence de cette opération.

Problème 9. *Déterminer la Perspective d'une suite de carreaux, dont les côtés sont inclinés de 45° à la base du tableau* (fig. 2, pl. 16).

Nous voyons que la base horizontale du tableau coupe les carreaux suivant leur diagonale, et que de chacun des points ABC, etc., les côtés de ces carreaux font à droite et à gauche, avec la base AE′, un angle de 45°. Portons ces divisions sur la base ae, et de chacun

des points a, b, c, d, e, menons des droites aux points de distance FF′; ces lignes, par leurs intersections, forment six carreaux entiers et quatre moitiés, contenus dans le triangle a*ge*. Si nous voulons remplir le vide à droite et à gauche du tableau, nous mènerons la droite a*f′*, qui sera la direction perspective des diagonales, telle que A*h*. Cette droite a*f′* coupera donc les droites menées au point de distance, en des points *i*, *k*, etc.; par chacun de ces points, nous mènerons des droites aux deux points de distance; il en sera de même de la droite e*f′*. Il faut, au reste, nous devons l'avouer, beaucoup d'attention pour tracer ces carreaux avec précision.

Problème 10 (fig. 1, pl. 18). *Déterminer la Perspective d'une suite de carreaux, dont les côtés forment un angle quelconque avec la base du tableau.*

Soit AB, la base horizontale du tableau, coupant une suite indéterminée de carreaux, tant au-dessus qu'au-dessous de cette même base (nous n'en avons ici que deux rangées, ce qui suffit). Portons sur la base du tableau vertical, les points d'intersection ACDEF, etc., en a, c, d, e, f, etc.; par *i*, menons une droite *i*j, parallèle à K*l*; portons I*j* sur l'horizon de *i′* en j′, qui sera le point de fuite de toutes les droites parallèles à K*l*. Menons les droites a*j″*, c′*j*, d*j′*, etc., nous aurons les directions des côtés parallèles à K*l*, qu'il ne s'agit plus que de couper par des perpendiculaires à ces lignes. Pour avoir le point de fuite de ces perpendiculaires, nous pourrions employer le moyen dont nous nous sommes servis pour K*l*; c'est-à-dire par *i* mener une parallèle à ces lignes, telle, par exemple, à la droite G*n*; mais nous voyons que cette parallèle, menée par *i*, couperait le prolongement de AB à un point qui serait trop éloigné : nous chercherons donc un autre moyen. Observons que le point d'intersection G, qui est sur la base du tableau, se trouve précisément à l'angle de deux carreaux G*l*, G*m*, et à l'extrémité de la droite G*n*. Ainsi, pour avoir la

perspective de cette ligne, nous n'avons besoin que de trouver la perspective de *n*, ce que nous savons déjà faire, et mener la droite *gn'*, qui coupera les premières aux points *o*, *p*, *q*, *r*, etc. Pour les autres lignes, nous chercherons deux points éloignés l'un de l'autre le plus qu'il nous sera possible, et nous répèterons cette opération à chaque ligne dont nous aurons besoin. Mais quoique ces opérations soient une suite de la méthode générale pour trouver la perspective d'une ligne quelconque, dans le cas qui se présente ici, elles n'en seraient pas moins longues et difficiles; nous allons donc encore recourir à un moyen indirect. Remarquons que les diagonales K*m*, *sl*, déterminent les carreaux en coupant les droites parallèles à K*l*, comme *sm*, etc. Cherchons donc les points de fuite de ces diagonales, en menant les droites *it*, *iu*, qui leur sont parallèles, ce qui nous donnera les points de fuite *t'*, *u'*, auxquels points nous mènerons les droites *gt'*, *gu'*, tandis que par les points d'intersection comme *v*, *x*, etc., nous mènerons des droites qui détermineront un certain nombre de carreaux. Si nous en voulons davantage, de l'un des angles du dernier carreau tel que *y*, nous mènerons de nouvelles diagonales *yt'*, *yu'*, ce qui nous donnera de nouveaux points d'intersection, par lesquels nous mènerons autant de droites. Si, sur les côtés du tableau, il restait des carreaux incomplets, faute de parallèles à a*j'*, d'un angle ou point d'intersection tel que i, et par *t'*, nous mènerions une droite indéfinie qui nous donnerait les intersections 2, 3, etc., par lesquels points et par *j'* nous mènerons des droites qui complèteront les carreaux.

PROBLÈME II (fig. 2). *Étant donnée la projection horizontale d'un hexagone dont un côté soit parallèle à la base du tableau, trouver la Perspective d'un carrelage hexagonal.*

Soit ABCDEF l'hexagone donné. S'il ne s'agissait que de trouver la perspective de cette figure, nous pourrions la trouver par l'un

des moyens quelconque que nous connaissons, et nous aurions l'hexagone perspectif ab*cdef*. Mais, pour faire un carrelage, nous devons employer un moyen plus général, afin de ne pas répéter l'opération autant de fois que nous aurons d'hexagones à faire. Afin d'y parvenir, portons d'abord AB, côté de l'hexagone, sur la base du tableau vertical en ab, ag, bh, etc. Menons dans la figure originale les diagonales AD, BE, CF, ce qui nous donnera six triangles équilatéraux. Cherchons les points de fuite de ces diagonales, qui seront sur l'horizon en *i*, *j*. Nous ne devons pas être embarrassés pour savoir comment nous avons pu obtenir ces points. Si cependant cela arrivait, rappelons-nous que l'intersection d'une droite menée de l'œil au tableau sera le point de fuite de toutes les droites qui seront parallèles à cette ligne. Par conséquent, si du point de vue *k*, nous abaissons à l'horizon une perpendiculaire, sur laquelle nous porterons la distance *k*K′, du spectateur au tableau, de *k* en K, ce point sera la position de l'œil, ramené dans le plan horizontal, et par lequel nous mènerons des parallèles aux diagonales AD, BE, qui rencontreront l'horizon en *i*, *j*, points cherchés. Menons les droites g*i*, a*i*, b*i*, etc., a*j*, b*j*, h*j*, etc.; et par les points d'intersection *f*, *e*, etc., menons des droites horizontales qui détermineront un certain nombre de triangles que nous bornerons dans cet exemple au point *l*. Nous prendrons six de ces triangles perspectifs, pour former autant d'hexagones qu'il sera nécessaire. Pour remplir les vides qui se trouveront sur les côtés du tableau, l'inspection de la figure nous suffira.

Même problème que le précédent; seulement l'hexagone n'a aucun de ses côtés parallèle au tableau.

(Fig. 1, pl. 19.) Nous pourrions résoudre ce problème de même que le précédent; mais comme plusieurs des diagonales, étant

trop inclinées au tableau, auraient leurs points de fuite sur l'horizon trop éloignés du point de vue, ce qui est souvent un inconvénient, observons d'abord que, dans cette figure, les côtés AB, CD, ainsi que la diagonale EF, sont perpendiculaires à la base du tableau, et prolongeons ces côtés de part et d'autre, tandis que par F nous mènerons une parallèle au tableau; l'hexagone se trouvera inscrit ainsi dans un rectangle *gh*, qui sera divisé en deux parties égales par la diagonale EF. Nous devons déjà entrevoir que le problème est simplifié, puisqu'il ne s'agit plus que de chercher la perspective d'autant de rectangles que nous voulons avoir d'hexagones. Portons donc E*g*, E*i*, sur la base du tableau vertical en ei, en eg, et successivement sur toute la base, en j, k, l, etc.; par chacun de ces points, menons au point de vue les droites *eo*, *go*, etc.; ces lignes seront les directions des côtés et des diagonales qui seront perpendiculaires au tableau. Il ne s'agit plus que de couper ces lignes de la manière la plus avantageuse, afin d'éviter la multiplicité des opérations. Observons que les côtés AB, DC sont coupés par les diagonales AD, BC, qui passent par les angles de l'hexagone, lesquels angles sont eux-mêmes déterminés par les diagonales EC, AF; que la diagonale FA, prolongée jusqu'à la base en *p*, détermine les angles A, F; de plus, que cette droite *p*, F, est parallèle à EC: il ne nous reste plus qu'à chercher le point de fuite de ces deux diagonales, qui sera *q*. Des points p, e, projections verticales de *p*, *e*, menons des droites p*q*, e*q*, qui couperont les perpendiculaires perspectives aux points *a*, *f*, *c*, par lesquels nous mènerons des horizontales qui détermineront les angles de tous les hexagones, etc. Nous pourrions pousser plus loin ces exemples, mais nous craignons de multiplier les planches, et par conséquent d'augmenter la dépense sans une utilité réelle. D'ailleurs, nous devons sentir qu'il est impossible d'exposer tous les cas particuliers, et que nous ne pouvons acquérir la connaissance des moyens d'abréviation dont chacun de ces cas peut

être susceptible, qu'en nous exerçant à résoudre beaucoup de problèmes dont les solutions sont fondées sur les principes généraux que nous avons exposés.

Problème 12 (fig. 2). *Déterminer la Perspective d'un cercle.*

Soient AB, ab, les projections du tableau; c, c' celles de l'œil; C, le point de distance; DEFG le cercle donné. Ce problème ne peut nous présenter aucune difficulté; nous pouvons d'abord le résoudre en cherchant plusieurs points pris à volonté sur la circonférence de ce cercle, tels que D, I, E, etc. Nous pouvons encore opérer d'une manière plus prompte et plus commode, en renfermant le cercle dans un carré AH, dans lequel nous mènerons les diagonales, ainsi que les deux diamètres DF, EG. Nous voyons que le cercle touchera le carré aux quatre points D, E, F, G; ainsi ces quatre points, joints aux quatre intersections I, J, K, L, du cercle avec les diagonales, nous donneront huit points, qui suffisent ordinairement. Ainsi cherchons la perspective du carré AH, qui sera a*h*; dans lequel nous mènerons les diagonales ainsi que les diamètres; ensuite nous projetterons sur la base ab, les points I, J, K, L, qui seront en l, i; de chacun de ces points menons les droites lc', ic', qui couperont les diagonales aux points *l*, *k*, *i*, *j*; par ces points et par les quatre premiers, nous ferons passer la courbe cherchée. Nous en ferons de même pour le cercle qui est à droite du tableau.

Comme le cercle est une figure que l'on a souvent à représenter en perspective, nous ne devons pas nous en tenir à cette opération particulière, et nous allons le considérer sous un autre rapport. Soit un nombre quelconque de points, pris sur les circonférences des cercles originaux; nous mènerons des droites à l'œil *c*, ainsi que les tangentes M*c*, N*c*, M'*c*, N'*c*; nous devons considérer la réunion de toutes ces lignes comme formant les projections hori-

zontales de deux cônes scalènes, à bases circulaires, et dont les sommets seront à l'œil du spectateur. Nous concevrons ces cônes comme étant coupés par le plan du tableau, et leurs sections dans ce même tableau comme étant les perspectives des bases ou cercles donnés; nous pouvons nous exercer à faire cette opération selon les règles ordinaires de la Géométrie descriptive, et nous verrons que le résultat sera absolument le même. Nous voyons donc que les perspectives de ces deux cercles seront nécessairement des ellipses, puisqu'elles sont le résultat de la section de deux cônes, par un plan qui n'est pas parallèle à leur base. Nous devons encore remarquer que dans ces deux ellipses, le grand axe mn, $m'n'$, ne passe point par o, o', perspective de O, O′, centre des cercles originaux; ces axes sont les perspectives des deux cordes MN, M′N′, déterminées par les tangentes Mc, Nc, M′c, N′c. Nous avons vu (Géométrie descriptive) le moyen de tracer une ellipse avec une règle de papier; voyons s'il ne serait pas possible d'employer ce procédé graphique dans le cas qui se présente ici, ce qui pourrait nous être avantageux dans plusieurs circonstances.

PROBLÈME 13 (fig. 1, pl. 20). *Inscrire un cercle dans un carré donné en perspective, et dont un des côtés est parallèle à la base du tableau.*

Nous savons déjà que l'ellipse doit toucher les quatre côtés du carré dans leur milieu apparent ou perspectif, aux points e, f, g, h; nous pouvons donc considérer la droite ef comme devant être le petit axe de l'ellipse que nous cherchons; nous savons encore que le grand axe doit passer perpendiculairement par le milieu du petit : divisons donc ef en deux parties égales, et par le milieu i, centre de l'ellipse, nous mènerons une perpendiculaire indéfinie, qui sera la direction du grand axe dont il nous reste à déterminer la longueur, ce que nous pouvons faire de plusieurs manières, ainsi que nous l'avons déjà vu. Prenons fi, ou ie,

moitié du petit axe, que nous porterons de *h* en *j*, sur la direction du grand axe; menons par les points *h* et *j*, une droite prolongée jusqu'à sa rencontre avec le petit axe en *k*, et la droite *hk* sera la longueur du demi-grand axe que nous porterons de *i* en *l*, et de *i* en *m*. Ayant les deux axes, nous pouvons facilement décrire cette ellipse avec la règle de papier, sur laquelle nous marquerons les points *h*, *j*, *k*; cette même règle peut aussi nous servir à tracer l'ellipse ou cercle perspectif de la fig. 2. De *f*, abaissons une perpendiculaire indéfinie à *gh*, sur laquelle nous porterons la règle de papier, en posant le point *h* sur *f*; et à l'endroit où tombera le point *j*, menons une parallèle à *gh*, qui coupera *ef* en *i*, qui sera le centre de l'ellipse; par ce point et par *k*, extrémité de la règle, menons une droite indéfinie *kin*, sur laquelle doit se promener le point *k* de la règle, tandis que *j* parcourra la droite *lm*, sur laquelle il est situé. Ainsi lorsque *k* sera en *o*, et *j* en *p* l'extrémité *h* sera en *g*, qui sera un des points de l'ellipse, etc. La fig. 1 nous a donné la règle avec laquelle nous venons d'opérer; mais il peut arriver que cette figure soit seule, et nous pourrions être embarrassés; cherchons donc le moyen de construire cette règle sans le secours de la figure précédente.

Soit le carré perspectif *ac* donné, dans lequel nous mènerons les diagonales, et par le point d'intersection *q* nous mènerons une droite parallèle à *ab*; par *q* et par *e*, milieu de *ab*, nous mènerons la droite *ef*, que nous diviserons en deux parties égales en *i*, qui sera le centre de l'ellipse, par lequel nous mènerons une parallèle à *gh*; par *q*, centre perspectif du cercle, menons de part et d'autre à *gh*, une perpendiculaire qui coupera le côté *dc* en *s*, et la droite *lm* en *r*; portons *sr*, de *g* ou de *h*, sur *lm*, en *p* ou en *i* : nous prolongerons la droite *gp* ou *hi*, qui coupera la perpendiculaire menée par *sq*, en un point *o*, et l'une ou l'autre des droites *gpo* ou *hio*, sera la règle cherchée avec laquelle nous opérerons comme ci-devant. Les bornes de cet Ouvrage ne nous

permettent pas d'exposer les principes sur lesquels cette opération est fondée; nous allons maintenant passer à la perspective des solides.

Problème 14 (fig. 3). *Étant données les projections horizontales de deux tétraèdres réguliers et égaux, déterminer la Perspective de ces corps.*

Soient AB, ab, les projections du tableau; *c*, le point de vue ou centre du tableau; D, D, les points de distance; EFG*h*, IKLM, les projections horizontales des deux tétraèdres donnés, dont l'un pose sur le plan horizontal par sa base, et l'autre par son sommet. Nous chercherons d'abord les perspectives des projections horizontales par les moyens que nous connaissons, puis par h', projection horizontale du sommet, nous élèverons une verticale indéfinie, sur laquelle nous porterons la hauteur perspective de *h*H, et nous mènerons les arètes eH', fH', gH'. A l'égard du second tétraèdre, de chacun des trois points *i*, *k*, *l*, nous élèverons une verticale indéfinie sur laquelle nous porterons la hauteur perspective de *h*H, et nous mènerons les droites mi', mk', ml'; nous n'avons rien de plus à dire sur ce problème, puisque nous savons tout ce qu'il faut pour le résoudre sans éprouver aucune difficulté.

Problème 15 (fig. 1, pl. 21). *Étant données les projections horizontales de deux cubes égaux, dont l'un est posé sur le plan horizontal par l'un de ses angles, et l'autre sur l'une de ses arètes, mettre ces corps en perspective.*

Nous n'avons pas plus à dire sur ce problème que sur le précédent, l'inspection seule de la figure étant suffisante pour entendre toute cette opération qui est très simple et n'exige que de l'attention.

PROBLÈME 16. *Mettre en perspective deux cylindres égaux donnés en projection horizontale* (fig. 1, pl. 22).

Ce problème ne présentant pas plus de difficultés que les précédens, nous nous dispenserons de répéter la manière de trouver la perspective d'un cercle; nous observerons seulement que la base supérieure d'un cylindre peut se trouver si près de l'horizon, que le carré dans lequel la base doit être tracée, devient si étroit, qu'il est physiquement impossible d'y inscrire une ellipse; lorsque ce cas arrive, nous devons nous contenter de quelques points principaux et tracer l'ellipse par approximation. Cet exemple va nous présenter une des singularités que nous aurons occasion de rencontrer par la suite, qui, au premier aperçu, paraissent être au moins des paradoxes et qui ne sont cependant rien moins que cela. Cette singularité consiste en ce que le cylindre ABCD, étant évidemment plus éloigné de l'œil *e*, que le second cylindre qui est situé en face du spectateur, sera par conséquent vu sous un plus petit angle, et par cette raison devra aussi paraître moindre au spectateur, ainsi que dans le tableau. Le spectateur voit donc réellement ce premier cylindre plus petit que le second, et cependant son diamètre dans le tableau sera plus grand. La raison de cette contradiction apparente est que les cordes FG, HI, qui sont déterminées par les rayons tangens F*e*, G*e*, H*e*, I*e*, sont les bases de deux triangles F*e*G, H*e*I, qui ont *e* pour sommet commun, et qui sont coupés différemment par le tableau KL. Nous voyons en effet que le triangle F*e*G est coupé par KL, obliquement à sa base FG, et que le triangle H*e*I est coupé par le même plan KL, parallèlement à la sienne HI; donc l'intersection *fg* sera plus grande que celle *hi*; ainsi l'œil *e* verra le diamètre apparent du premier cylindre sous l'angle F*e*G, et celui du second sous l'angle H*e*I. Or, le premier de ces angles est évidemment plus petit que le dernier; donc l'œil *e* voit réelle-

ment le premier de ces cylindres plus petit que le second, et cependant nous sommes obligés de le faire plus gros ou plus large dans le tableau, puisqu'il est incontestable que l'apparence de FG est *fg* sur KL, ou *f'g'* dans le tableau, puisque cette ligne est plus grande que la corde HI ou *h'i'*. Cette défectuosité, qui, au premier abord, paraît si choquante, si contradictoire, et à laquelle les Artistes pour la plupart sont bien éloignés d'acquiescer, est presque nulle, lorsque la distance est plus grande qu'elle n'est dans cet exemple (où nous l'avons prise à dessein beaucoup trop petite, afin de rendre plus sensibles les défectuosités dont nous parlons), et doit nous faire sentir la nécessité de savoir choisir une distance convenable au sujet que nous nous proposons de mettre en perspective. Nous pouvons voir la preuve de ce que nous avançons, en examinant la figure seconde, dans laquelle le sujet est le même, seulement la distance de l'œil au tableau est triple de la première; ainsi *e*'E n'est que le tiers de la distance employée dans cette figure. Nous aurons soin aussi de dégrader convenablement le ton des colonnes qui seront le plus éloignées de l'œil, selon les règles de la perspective aérienne, ce qui rendra à peu près nuls les mauvais effets que nous venons d'exposer.

Problème 17 (fig. 1, pl. 23). *Étant données, 1° la projection horizontale d'un cône posant par sa base sur le plan horizontal ou objectif; 2° la projection horizontale d'un cône égal au premier et posant sur sa face, mettre en perspective ces solides.*

Nous devons être en état de résoudre ce problème par l'inspection seule de la figure, dont l'opération ne diffère en rien des précédentes, et n'est qu'un exemple d'exercice.

Problème 18 (fig. 1, pl. 24). *Étant donnée la projection horizontale d'une sphère, trouver la perspective de ce corps.*

Comme ce problème est plus difficile à concevoir que les précédens, nous nous y arrêterons davantage. Soient AB, ab, les projec-

tions du tableau ; *c*, *c'* celles de l'œil ; le cercle D, la projection horizontale de la sphère donnée, nous demandons que le centre de cette sphère soit à la hauteur de l'horizon ; par conséquent la projection verticale de ce centre sera au point de vue *c'* : menons à l'œil *c* les tangentes E*c*, F*c* ; menons aussi la corde EF, que nous considérerons comme étant la base d'un cône formé par les rayons visuels tangens à la sphère, et dont le sommet est à l'œil *c*. La section ef de ce cône par le tableau sera un cercle, puisque ce cône est coupé parallèlement à sa base ; ce cercle aura donc pour diamètre ef, et par conséquent ce ou cf, pour rayon ; puisque nous demandons que le centre de la sphère soit à l'horizon, il sera au point de vue *c'* ; donc, si avec le rayon ce de la projection horizontale, nous décrivons dans le tableau, du centre *c'*, le cercle d, ce cercle sera la perspective cherchée.

Nous pouvons nous convaincre de la vérité de ce résultat, en opérant plus directement ; après avoir trouvé l'intersection ef, couchons dans le plan horizontal la hauteur de l'œil de *c* en C, ainsi que celle de la sphère D en D·, de manière que le centre G soit à la hauteur de l'horizon ; menons de G à l'œil c, le rayon visuel GC : l'intersection de ce rayon avec le tableau, sera g ; ce point sera élevé au-dessus du plan objectif de la hauteur cg, que nous porterons dans le tableau de c' en *c'* ; ce point sera donc la perspective du centre de la sphère : menons les tangentes HC, IC, ainsi que la corde HI que nous considérerons de même que EF, comme étant la base d'un cône HCI, lequel est coupé par le tableau parallèlement à sa base, et l'intersection sera un cercle qui aura pour diamètre hi, et pour rayon gh ou gi, avec lequel nous décrirons dans le tableau, du centre *c'*, le cercle d, qui sera égal au premier que nous avons déjà trouvé ; donc ce cercle est réellement la perspective de la sphère donnée.

Considérons maintenant le cercle D comme étant la projection horizontale d'une sphère posée sur le plan objectif en *g*. Nous de-

vons concevoir ce point comme pouvant être à la fois la projection du point d'attouchement de la sphère et du plan; ainsi que celle du centre de cette même sphère, et de l'extrémité du diamètre vertical gc; en un mot de tous les points qui peuvent être situés dans la verticale du point *g*. Pour avoir la perspective de ce point dans le tableau, menons à l'œil C le rayon *g*C, qui coupera le tableau en k; *c*k sera donc la hauteur que nous porterons dans le tableau de c′ en *k*′, qui sera la perspective du point d'attouchement de la sphère et du plan objectif; des points e, f, élevons une verticale indéfinie au tableau: l'espace qui sera entre ces deux lignes, comprendra la largeur apparente ou perspective de la sphère, ou bien son diamètre horizontal que nous déterminerons bientôt. Cherchons maintenant l'apparence du diamètre vertical de cette sphère : renversons la sphère dans le plan objectif en D··; de l'œil C, menons les tangentes LC, MC, et menons la corde LM, que nous considèrerons aussi comme étant le diamètre d'un cercle, base d'un cône formé par tous les rayons tangens à la sphère et passant par l'œil; nous voyons que ce cône n'est pas coupé parallèlement à sa base par le tableau; par conséquent sa section sera une ellipse dont lm sera le grand axe ou le diamètre vertical. Portons cl, cm dans le tableau de c′ en *l*, et nous diviserons la droite *lm*, en deux parties égales en *n*; et par ce point menons une horizontale que nous ferons égale à ef, ou qui se trouvera déterminée par les deux verticales élevées des points e, f; cette ligne *op* sera le petit axe de l'ellipse, apparence ou perspective de la sphère située au-dessous de l'œil dans le plan central; ayant les deux axes de l'ellipse, il nous sera facile de la tracer avec la règle de papier.

Nous rencontrons encore ici une de ces contradictions apparentes dont nous avons déjà vu un exemple; car il est certain que de quelque côté que nous regardions une sphère, elle nous paraît toujours ronde ou circulaire; et en effet nous la voyons réellement telle qu'elle nous paraît, et cependant en perspective il n'y a qu'un

seul cas où nous puissions nous permettre de la faire ronde, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque son centre se trouve au point de vue. Dans tous les autres cas, sa perspective est une ellipse dont le grand axe est toujours dirigé vers le point de vue, ce que nous allons voir dans les exemples suivans. Nous avons encore pris exprès la distance de l'œil au tableau beaucoup trop courte, afin de rendre plus sensibles ces alongemens de l'apparence de la sphère dans le tableau; car ils sont presque insensibles lorsque la distance est plus grande, ainsi que nous le verrons. Comme ce problème est important et assez difficile, nous allons encore en présenter deux ou trois exemples gradués, les plus simples que nous ayons pu trouver. La plupart des ouvrages sur la perspective ne donnent aucun moyen pour mettre la sphère en perspective, et le très petit nombre des auteurs qui en ont parlé, ne fournissent que des moyens qui exigent, pour être compris, des connaissances en Mathématiques beaucoup plus élevées que n'en ont ordinairement les commençans; par conséquent ces moyens ne peuvent pas être à leur portée, et doivent leur paraître trop abstraits. (Fig. 1, pl. 24.)

Soient AB, ab les projections du tableau; c, c' celles de l'œil; D celle de la sphère donnée, posant sur le plan objectif; menons à l'œil c, les tangentes Ec, Fc; par les points EF, menons les droites EG, FH parallèlement à AB; entre ces deux droites EG, FH, menons autant de parallèles que nous jugerons à propos, telles que IK, LM, etc. Nous considérerons toutes ces lignes comme étant les traces d'autant de plans verticaux, coupant la sphère parallèlement au tableau. Toutes ces sections seront autant de cercles qui comprendront toute la partie visible de la sphère, déterminée par les tangentes Ec, Fc; les perspectives des cercles HF, IK, LM, etc., qui sont parallèles au plan du tableau seront aussi des cercles. Si nous enveloppons tous ces cercles perspectifs par une courbe, nous aurons la perspective de la sphère.

Il ne s'agit plus que de trouver la perspective de chacune des sections circulaires de la sphère, ce qui n'est pas difficile; menons premièrement le diamètre *rs* qui sera la projection horizontale de l'un des axes de la sphère, passant par les centres des cercles HF, IK, etc.; cherchons d'abord la direction perspective de cet axe; observons que le point r est élevé au-dessus du plan objectif de la hauteur du rayon de la sphère, et qu'il touche le tableau; par conséquent sa perspective sera en R, et comme cet axe est perpendiculaire au tableau, sa perspective sera dirigée vers le point de vue; menons donc la droite R*c'* qui sera la direction cherchée, et sur laquelle doivent se trouver les centres de tous les cercles HF, IK, etc. Cherchons premièrement le diamètre du cercle EG; par 1, centre de ce cercle, menons la droite 1*c* qui coupera le tableau en 1·; de ce point élevons au tableau une verticale qui coupera la direction R*c'* en 1', qui sera la perspective cherchée du centre 1. Le rayon 1E a pour apparence, dans le tableau AB, le rayon 1·e, que nous prendrons pour décrire dans le tableau du centre 1' le cercle z; nous en ferons autant pour chacun des autres cercles, et nous ferons passer une courbe elliptique qui les enveloppera tous.

Ce moyen est un peu long et n'a pas toute la précision que nous pourrions désirer; car nous n'avons pas déterminé les deux axes préalablement, ce qui aurait diminué le travail et simplifié l'opération; mais cette figure était absolument nécessaire pour nous convaincre que la réunion de tous ces cercles contient toute la partie visible de la sphère, et forme une ellipse dans le tableau; d'ailleurs la connaissance de cette opération était absolument nécessaire pour l'intelligence de celle qui va suivre, qui n'en est qu'une conséquence, qui est infiniment plus simple, et qui donne beaucoup plus de précision (fig. 2). Après avoir mené les tangentes E*c*, F*c*, les droites EG, FH, et avoir trouvé le point R dans le tableau, comme dans l'exemple précédent, nous mène-

rons la droite Rc', que nous prolongerons indéfiniment vers R; nous chercherons sur AB, les intersections des centres 1, 6, des cercles EG, FH, et des points 1·, 6·, nous élèverons au tableau des verticales qui couperont la direction du grand axe aux points 1', 6'. Nous prendrons l'apparence du rayon E1, qui sera e1·, ou bien 6· f (car ils sont égaux), et dans le tableau, des points 1', 6' comme centres, nous décrirons un arc à gauche et à droite sur Rc', aux points 7, 8, et la droite 7 8 sera le grand axe de l'ellipse que nous cherchons. Nous diviserons le grand axe en deux parties égales, et par le milieu 9', nous mènerons une perpendiculaire indéfinie; cette ligne sera la direction du petit axe qu'il s'agit de déterminer. Nous aurions pu trouver le milieu 9 en divisant e f en deux parties égales, et du milieu 9·, élever une verticale au tableau; cette ligne passera également par le point 9'. Revenons au point 9·, sur AB; de ce point, et par *c*, nous mènerons une droite prolongée jusqu'à sa rencontre avec le diamètre *rs*, et du point d'intersection 9, nous mènerons une horizontale LM; de L nous mènerons une droite L*c*, qui coupera AB au point l; nous prendrons l9·, apparence du rayon L9, et de 9', comme centre, nous couperons la direction du petit axe aux points 10, 11, et le petit axe sera déterminé. Ayant les deux axes il nous sera facile de tracer l'ellipse.

La fig. 1, pl. 26, représente la même sphère dans les trois mêmes positions que les précédentes, seulement la distance de l'œil au tableau est double de la première. Nous voyons que la différence est bien moins sensible lorsque la distance est convenable, et cependant nous aurions pu prendre cette distance beaucoup plus grande sans aucun inconvénient, ce qui aurait encore diminué les différences.

Problème 19 (fig. 2). *Déterminer, dans le Tableau, la grandeur de deux figures, dont l'une est arrêtée au pied d'une tour, tandis que la seconde est placée au haut de cette même tour.*

Soient AB, le profil du terrain ou du plan objectif, CD la hauteur de la tour, eE le spectateur, CF la figure au pied de la tour, DG la figure placée au haut de cette tour, HI le profil du tableau. Menons par les extrémités de chacune des figures à l'œil E du spectateur, les rayons visuels CE, FE, DE, GE; nous reconnaissons d'abord que la fig. DG est beaucoup plus éloignée de l'œil E, que ne l'est la figure CF. En effet, nous apercevons ces deux figures sous des angles très différens, puisque l'angle CEF est évidemment plus grand que l'angle DEG, ce qui fait que nous voyons réellement la figure DG plus petite que l'autre; d'après cela, nous serons naturellement portés à conclure que nous devons la représenter plus petite dans le tableau. Ce jugement serait cependant une erreur, car nous voyons que les intersections *cf*, *dg*, sont égales; donc ces deux figures doivent être de même hauteur dans le tableau. Cette proposition est fondée sur une propriété incontestable du triangle (*voyez* la Géométrie), qui veut que lorsqu'un côté d'un triangle est divisé en parties égales ou inégales, si l'on mène de chacun des points de division des droites au sommet E, et que l'on coupe ce triangle par une droite parallèle au côté divisé, les parties de cette droite soient proportionnelles à celles du côté divisé. Ainsi nous voyons dans cette figure que CF : *cf* :: DG : *dg*, donc, etc. Nous sentons bien qu'il convient de diminuer ou d'affaiblir le ton de la figure DG, en raison de son éloignement de l'œil. On rencontre assez fréquemment, principalement dans les tableaux de marine, dans lesquels les matelots qui sont au haut du mât, sont plus petits que ceux qui sont au bas de ce même mât, une faute qui tient à l'ignorance de ce principe.

Des Plans coupés (fig. 1 et 2, pl. 27).

On nomme plans coupés, des plans ou terrains qui sont plus hauts ou plus bas que le plan objectif sur lequel est placé le spectateur, et qui lui sont parallèles; ou plutôt différens plans objectifs parallèles entre eux. Tels sont par exemple les terrains ou terrasses qui sont plus ou moins élevés les uns que les autres; cette première figure est le profil des objets que nous nous proposons de représenter dans le tableau, fig. 3.

AB est le plan objetif sur lequel sont posés le spectateur *cc*, et le tableau DE; FG est un plan plus bas que AB; HI est un plan plus élevé que les deux premiers, et qui est au niveau du plan horizontal ou à la hauteur de l'œil. Le tableau fig. 2, est construit sur une échelle double de celle de la figure première.

Par l'œil c et par A, menons le rayon visuel AC, qui coupera le tableau en *a*; portons le double de la hauteur D*a*, dans le tableau sur la trace du plan central de d en *a'*; par ce point menons une horizontale dans toute l'étendue du tableau: cette ligne sera la limite A du plan AB; si nous prolongeons le rayon CA, jusqu'au plan FG en K, ce point sera la première limite de la partie KF, du fossé FG visible au spectateur, la partie KG lui étant entièrement cachée par l'escarpement GA; menons le rayon FC qui coupera le tableau en *f*; portons le double de D*f* dans le tableau de d en *f'*; par ce point menons une horizontale qui sera la dernière limite du fossé ou le pied de la muraille FI, dont l'horizon sera la hauteur, ainsi que celle du plan HI ou terrasse supérieure. Observons que nous aurions pu obtenir les points *a'*, *f'*, etc., d'une manière plus directe, ainsi que nous l'avons déjà fait plusieurs fois et que nous rappelons seulement. Portons la distance de A au profil du tableau, ou AD sur la base du tableau vertical de d en a; menons la droite ac· qui déterminera

également le point a', ce qui ne peut être autrement, puisque ad, n'est que la moitié de la longueur qu'elle devrait avoir d'après l'échelle du tableau (qui est double de celle du profil ainsi que nous l'avons dit), et que c' c· n'est aussi que la moitié de la distance de l'œil au tableau; par conséquent ces deux lignes sont en rapport. Il en sera de même de la distance de tous les autres points au profil du tableau.

Si nous voulions trouver directement dans le tableau l'apparence d'un point situé dans un plan objectif quelconque, tel que F dans le plan FG, nous nous y prendrions de cette manière en raisonnant ainsi : comme l'intersection du plan HI, prolongé jusqu'au tableau, est en c celle du plan AB, avec ce même tableau sera en D; ces deux sections dans le plan central, seront pour la première l'horizon, et pour la seconde la base du tableau; par conséquent, si nous prolongeons le plan FG jusqu'à ce qu'il rencontre le prolongement du tableau, l'intersection de ces deux plans sera en L, et dans le tableau vertical (prolongé), ce sera la droite horizontale passant par le point l, car al sera le double de DL, puisque cette échelle est double de celle du profil. Pour avoir maintenant la perspective de F, prenons FL distance de F au tableau, et portons-la dans le tableau de l en f; menons la droite fc· qui coupera lc' en f' qui sera le point cherché. Il en sera de même de tous les autres points qui seraient situés dans différens plans plus ou moins élevés. Nous opérerons donc sur toutes ces intersections, comme sur la base du tableau.

Supposons actuellement que nous ne puissions pas prolonger le tableau vertical (ce qui arrive souvent), et que cependant nous voulions avoir la perspective d'un point quelconque, situé dans un plan plus ou moins élevé que le plan objectif, dont l'intersection est représentée par la base du tableau; par exemple, la perspective de F qui est six pieds plus bas que ce plan. Portons la distance LF sur la base du tableau de d en f·; menons la droite

f· c· qui coupera dc' en f'' : ce point est sur le plan AB, et il devrait être sur celui FG; il se trouve donc six pieds trop haut : il ne s'agit donc plus que de l'abaisser de six pieds perspectifs ou relatifs à la distance de ce point, à la base du tableau; par f'', menons une horizontale indéfinie à droite ou à gauche; portons six pieds de l'échelle du tableau sur la base de d en m; menons la droite mc' qui coupera l'horizontale en n, et $f''n$ sera perspectivement égale à dm ou à six pieds, que nous porterons verticalement de f'' en f', qui sera le point cherché. Nous n'avons pas besoin de dire que s'il eût fallu porter ce point six pieds plus haut, nous aurions porté notre mesure en c'. D'après ce qui vient d'être énoncé, nous ne devons éprouver aucune difficulté à poser des figures sur ces différens plans, soit en nous servant du profil, soit en employant le moyen indiqué fig. 2, pl. 13. Les droites OP, QR, IS, représentent trois figures, la première sur le plan AB, la seconde sur FG et la troisième sur HI. Nous pouvons en placer d'autres à volonté.

Si nous voulons couper le terrain FIH, par une ouverture ayant une rampe ou talus incliné selon la droite FT, qui n'en est qu'une partie (faute de place), mais que nous pouvons facilement concevoir devoir rencontrer le prolongement du plan IH, en un point quelconque U; par l'œil c menons parallèlement à FT, la droite cu qui par son intersection avec le profil du tableau, nous donnera le point de fuite de toutes les droites parallèles à FT. La projection de ce point dans le tableau sera u'; déterminons maintenant la largeur de l'ouverture que nous nous proposons de faire et que nous supposerons dans cet exemple être de trois toises; nous porterons de part et d'autre dans le prolongement du plan du tableau, de l en V, une toise et demie; des points V, V, nous mènerons au point de vue des droites Vc' Vc' qui détermineront l'ouverture vv; si le passage de cette ouverture était horizontal, ou sur le prolongement FX du plan GF, les directions des côtés

fuyans ou perpendiculaires au tableau, seraient les droites vc', vc'; mais comme le terrain est incliné depuis FT jusqu'à la rencontre du plan IH, les directions devront donc changer et tendre vers leur point de fuite u'. Menons ensuite les droites vu', vu', qui couperont le plan horizontal (ou IH), en y, et la droite vy sera à l'intersection du plan incliné vy avec le plan horizontal IH; si de y, nous abaissons une verticale, cette ligne rencontrera le plan objectif FG en y', et la droite yy' sera perspectivement égale à $v'v$; ainsi une figure zz' qui serait placée sur yy', ou sur le haut du talus et qui serait grande d'environ six pieds, aurait environ la moitié de cette ligne yy' qui est de douze pieds. Après avoir indiqué les lits des pierres de la muraille qui sont horizontaux, nous dirigerons les lits de retour au point de vue c', qui est comme nous le savons, le point de fuite de toutes les horizontales et perpendiculaires au tableau. Nous pouvons aussi tracer un gazon, des balustres, etc., comme nous les voyons dans la fig. 3 qui est terminée: cela ne présente aucune difficulté, nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet.

Problème 20 (fig. 3, pl. 26). *Étant donnée la perspective d'une droite ab, dirigée vers un point c de l'horizon, lequel point est supposé ne pouvoir être contenu dans le papier, par un point d aussi donné, mener une droite qui concoure à ce même point c.*

Supposons le problème résolu; nous voyons que ab tend au point c, ainsi que de et que le triangle fed se trouve coupé par l'horizon gc; nous avons donc la proportion $fh : hd :: bi : ie$. La droite ie sera donc la quatrième proportionnelle à chercher. Par le point donné d, menons une perpendiculaire à l'horizon, jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne donnée (ou son prolongement) f, et nous aurons $fh : hd :: bi : x$, égale ie. Nous mènerons la droite be qui sera la ligne demandée.

PROBLÈME 21 (fig. 59, pl. 26). *Étant donnée en perspective une droite* A*a*, *trouver sur la surface de l'eau la réflexion de cette ligne.*

Nous ne répéterons pas ici ce que nous avons déjà dit de la réflexion des objets sur une surface polie. Soit donc la droite aA, élevée sur le milieu d'un socle ou de bC, lequel est posé sur la surface de l'eau, dont la limite est à l'horizon de. Prolongeons indéfiniment les droites Bb, Ff, Cc, Aa, etc.; ensuite faisons $bB' = bB$, $fF' = fF$, $cC' = cC$, etc; joignons $B'F'$, C', par des droites, nous aurons la réflexion du socle bC. Pour avoir la réflexion de la droite Aa, cela est un peu plus difficile, parce que nous n'avons pas son point de contact avec la surface de l'eau ce qu'il est absolument nécessaire d'avoir. Par a, pied de la droite Aa, menons une horizontale ag ou ai; de l'un ou de l'autre des points g, i, menons verticalement la droite gh ou ij: de h ou de j, menons une parallèle à ga ou à ia: ces lignes couperont également le prolongement de Aa en a'; nous ferons $a'A'$ égal à A, et nous aurons kA' pour la partie visible de aA ou de la réflexion cherchée. Ce moyen général avec lequel nous devons nous familiariser, est le seul applicable à tous les cas de réflexions.

De la Perspective des Ombres.

Après ce que nous avons déjà dit sur les projections des ombres, il nous reste peu de choses à dire sur ce sujet, parce que nous devons être en état de concevoir les opérations dont nous allons nous occuper, qui sont à peu de chose près les mêmes que celles que nous connaissons déjà. La seule différence est que nous opérerons directement sur le tableau par le rayon lumineux, ce qui est avantageux dans plusieurs circonstances; mais nous ne devons pas nous dissimuler que nous serons fréquemment obligés d'avoir recours aux projections ordinaires.

Nous dirons donc, que la lumière peut être située de trois manières différentes par rapport au tableau; 1° elle peut être placée derrière ce tableau; 2° elle peut être dans le plan même du tableau; 3° enfin, elle peut être en avant de ce même tableau. Nous allons voir successivement ces trois différens cas; nous nous servirons dans cet exemple de la fig. 1 et 2 de la projection des ombres, pl. 1, à laquelle nous ajouterons seulement deux droites. Dans tout ce que nous allons dire, nous croyons nécessaire de joindre à la figure perspective la projection horizontale du même sujet, afin de mieux comprendre et suivre plus facilement l'analogie de ces deux opérations.

Soient (fig. 1, pl. 68) le tableau perspectif; $c'C$, la lumière située derrière le tableau; $d'D$, un jalon dont il faut trouver l'ombre portée sur le plancher ou plan horizontal; par c' projection horizontale ou pied de la lumière, et par d, menons une droite indéfinie qui sera coupée par le rayon CD prolongé, et le point d'intersection e déterminera la longueur de l'ombre $d'e'$. Pour déterminer celle du jalon fF, dont une partie est interceptée par un mur ou plan vertical, menons la droite indéfinie $c'f'$ qui sera coupée par le prolongement du rayon CF en un point g', ce qui déterminera l'ombre $f'g'$ du jalon fF, portée sur le plancher supposé prolongé; mais comme cette ombre est interceptée en partie par le mur en h', élevons de ce point une verticale qui rencontrera le rayon Cg' au point l; et la droite $h'l'$ sera la portion d'ombre relevée sur le mur vertical. Nous devons facilement voir que les ombres des jalons $x'X$, $y'Y$ se trouveront de même. La fig. 2 représente le même sujet que le précédent, seulement la lumière est dans le plan du tableau.

Le troisième cas est celui où la lumière est en avant du tableau (fig. 1 et 2, pl. 28); nous commencerons d'abord par chercher la perspective de cette lumière qui est en c, fig. 2, ce qui est indispensable; de c projection horizontale de la lumière, nous

mènerons à *ab*, une perpendiculaire indéfinie, et nous supposerons momentanément la lumière située en *d*, ou dans le plan du tableau. La projection perspective de ce point *d* sera sur la base ab du tableau, fig. 1, en d; de ce point et dans la direction du point de vue *e'*, menons une droite indéfinie en avant du tableau; prenons dans la projection horizontale la distance *cd* de la lumière au tableau *ab*, et portons-la de *d* en *f*; menons la droite *cf*: cette ligne sera évidemment inclinée de 45° sur la base *ab*; par conséquent la perspective de cette ligne dans le tableau sera dirigée vers le point de distance G. Nous porterons donc la même distance *cd*, sur la base ab du tableau perspectif de d en f; par ce dernier point et par G, nous mènerons la droite Gf prolongée en avant du tableau, jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire indéfinie d*e'*, et le point d'intersection *c* sera la perspective du pied de la lumière, ou bien celle du point *c* de la projection horizontale, puisque les droites d*c* et df sont perspectivement égales aux droites *dc*, *df*. Cherchons maintenant la hauteur perspective de cette même lumière; de d, élevons sur ab une perpendiculaire sur laquelle nous porterons de d en D la hauteur réelle que nous nous proposons de donner à la lumière, si elle était située dans le plan du tableau.

Par *e'* et par D, menons une droite indéfinie: cette ligne sera perpendiculaire au plan du tableau, et par conséquent sera parallèle à la droite *e'*d*c*; donc si de *c* nous élevons une parallèle à dD, jusqu'au point d'intersection C, les droites *c*C, dD, seront perspectivement égales; la droite *c*C sera donc la hauteur perspective de la lumière située en avant du tableau. Actuellement que toutes les difficultés sont levées, nous allons opérer directement et de la même manière que nous l'avons fait dans les exemples précédens.

Cherchons d'abord l'ombre de la droite PO inclinée aux deux plans; par *c* pied de la lumière, et par *o* pied de la verticale *o*O, menons une droite indéfinie; ensuite par C point lumineux et par O, menons une autre droite jusqu'à ce qu'elle coupe la pre-

mière, le point d'intersection q sera l'ombre de O projetée sur le prolongement du plan horizontal ou du plancher. Menons la droite Pq, cette ligne sera l'ombre de la droite inclinée sur ce même plancher ou plan objectif; mais comme cette ombre Pq est en partie interceptée par un plan ou mur vertical au point *r*, et que le point O touche ce même mur, l'ombre et le point se trouveront confondus; il ne nous reste donc plus qu'à mener la droite *r*O, qui représentera la portion *r*q de l'ombre interceptée par la muraille.

Nous voyons que cette opération est extrêmement facile, que nous avons obtenu le point q, directement sans employer aucun moyen intermédiaire, et sans avoir eu besoin de recourir à la projection horizontale que nous n'avons mise ici que pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons dit et de ce qu'il nous reste encore à dire. Nous devons nous rappeler que le point lumineux C peut se trouver au niveau de O ou même plus bas, et qu'alors nous ne pourrions pas obtenir le point q aussi directement que nous l'avons eu; dans ce cas nous serons donc obligés d'employer le moyen indirect que nous connaissons déjà, mais que nous croyons utile de répéter ici. Prenons sur la projection horizontale P*o* un point quelconque *s*; de ce point élevons une verticale qui coupera la droite originale PO en un point S: il ne nous reste plus qu'à chercher l'ombre de la hauteur *s*S; par *s* et par *c*, menons la droite indéfinie *cs*, ensuite nous mènerons le rayon CS qui étant prolongé, coupera la droite menée par *c* et par *s*, en un point t; nous mènerons la droite Pt qui coupera l'intersection de la muraille et du plancher au même point *r*, que nous avons trouvé par la première opération, et nous mènerons la droite *r*O.

Nous allons maintenant chercher l'ombre du cube; et comme tous les points de cette ombre s'obtiennent de la même manière, nous nous contenterons d'opérer pour un seul, par exemple, le point *i*. Menons la droite indéfinie *ch*, ainsi que la droite aussi in-

définie CH, qui coupera la première en un point *i* qui sera l'ombre de H; menons la droite *hi*, et nous aurons l'ombre de l'arête *h*H. Nous en ferons autant pour toutes les autres arêtes, telles que *k*K, *m*M, etc.

Il est des circonstances dans lesquelles il est plus facile et plus expéditif d'opérer directement sur le tableau perspectif, et dans d'autres il est plus avantageux de recourir à la projection horizontale; mais comme nous ne pouvons pas déterminer ces différens cas, qu'un long exercice peut seul faire connaître, nous ferons bien de répéter cette opération dans la projection horizontale, afin de ne laisser aucun doute sur l'analogie ou la concordance de ces deux opérations. D'ailleurs il est souvent plus avantageux (ainsi que nous l'avons déjà dit) d'opérer d'abord sur la projection horizontale et ensuite de mettre le tout en perspective; il en résulte ordinairement beaucoup plus de précision. Nous conserverons dans cette seconde figure les mêmes dimensions aux objets, ainsi que les mêmes lettres, et nous suivrons aussi le même ordre.

Soient *ab* le tableau horizontal, *g* le point de station ou de distance du spectateur au tableau, *c* le pied ou projection horizontale de la lumière, *o*P la projection horizontale de la droite OP inclinée, et enfin le carré *mh* la projection horizontale du cube. Nous chercherons d'abord l'ombre de la droite inclinée: menons indéfiniment la droite *co*; par l'extrémité *c* de cette ligne, élevons une droite qui lui soit perpendiculaire, sur laquelle nous porterons de *c* en C la hauteur que nous nous proposons de donner à la lumière (qui est ici la même que dD, fig. 1); par *o*, élevons une parallèle à *c*C, sur laquelle nous porterons de *o* en O′, la hauteur *o*O, de l'extrémité O, de la droite PO; nous devons facilement voir que par cette opération nous avons couché dans le plan horizontal perpendiculairement à *co*, la lumière *c*C et la hauteur *o*O de la droite PO; menons maintenant le rayon lumineux CO′, jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de *co* ou de

la droite *coy*, ce qui doit nous donner le point d'intersection q, qui sera le même que celui que nous avons obtenu dans le tableau perspectif; mais comme le rayon CO′ est presque parallèle à sa projection horizontale *coy*, ces deux lignes ne pourront se rencontrer qu'à une distance beaucoup trop grande pour notre papier; nous serons donc obligés d'employer le moyen indirect, ce que nous avons pu éviter en opérant directement sur le tableau. Voilà donc un de ces cas qui se présente, dans lesquels il est plus avantageux d'opérer sur le tableau, quand même le rayon serait parallèle à sa projection; car dans ce dernier cas, nous aurions obtenu le point q sur l'horizon du tableau, ou à l'infini, ce qu'il nous aurait été impossible de faire dans la projection horizontale.

Revenons à notre moyen indirect, fig. 2; prenons à volonté sur *o*P un point *s*; élevons de ce point une verticale qui coupera PO en S; menons la droite indéfinie *cs*; renversons perpendiculairement à *cs*, la lumière *c*C′ et la hauteur *s*S en *s*S′; menons ensuite le rayon C′S′, qui coupera le prolongement de *cs* en un point t; menons la droite P*t* qui sera la direction de l'ombre PO, sur le plan horizontal, et qui sera coupée en *r* par le mur vertical, et le problème sera résolu. Nous allons seulement déterminer l'ombre de l'une des arêtes du cube; menons la droite indéfinie *ch* sur laquelle nous éleverons perpendiculairement des points *c*, *h*, la hauteur de la lumière de *c* en C″, ainsi que l'arête du cube de *h* en H; menons le rayon C″H jusqu'à ce qu'il coupe le prolongement de *ch* en *i* qui sera le point cherché, et la droite *hi* sera l'ombre de l'arête *h*H.

Nous allons ajouter à ce que nous venons de dire, dans les deux planches suivantes, deux exemples du même sujet; dans le premier, la lumière sera située derrière le tableau, et dans le second, elle sera en avant de ce même tableau; nous réunirons dans ces exemples les projections horizontale, verticale et perspective.

Puisque les opérations que nous présentent ces exemples sont les mêmes que celles que nous venons de faire, et qu'elles nous paraissent être suffisamment indiquées dans les figures, nous nous dispenserons de les décrire; d'ailleurs nous croyons nécessaire de laisser quelque chose à faire pour exercer l'intelligence de nos lecteurs, et par là les mettre dans la nécessité de se familiariser avec ces opérations, dans lesquelles, nous n'en doutons pas, ils réussiront avec du travail, de la patience et surtout de l'attention. Nous aurons soin pour leur faciliter les principales de ces opérations, de les indiquer par des lettres qui seront communes aux deux figures. La fig. 1, pl. 30, représente la projection horizontale de deux galeries se coupant à angle droit, et dont l'une est perpendiculaire au plan du tableau, tandis que l'autre est parallèle à ce même tableau. Ces galeries sont voûtées en arc d'ogive (voyez la fig. 2, pl. 31), et les intersections de ces deux voûtes ont pour projections horizontales dans la fig. 1, les droites *fg*, *ih* (nous avons omis ces lettres dans la fig. 2, faute de place); la droite *ab* représente le tableau horizontal, *c* le point de station ou la distance du spectateur au tableau; la droite D*e* est la projection horizontale d'une lance DE, appuyée contre la muraille, *k* est le pied de la lumière *k*K située derrière le tableau, k'K est le pied de la lumière, supposée située en avant du tableau, ce qui établit deux suppositions ou cas différens que nous devons distinguer, et ce qui doit nous donner deux tableaux du même sujet, mais qui doivent être éclairés de deux manières différentes; telles sont les fig. 1 et 2, pl. 32. La droite *c*C est la hauteur de l'œil du spectateur, couchée dans le plan horizontal, la droite D*l* est l'ombre de la lance produite par la lumière *k*K située derrière le tableau, la droite D*l'* est l'ombre de la même lance produite par la lumière *k'*K' placée en avant du tableau; ces deux ombres sont projetées sur le plan horizontal (abstraction faite des obstacles qu'elles doivent rencontrer). Ce que nous venons de dire de la fig. 1, est

aussi commun à la fig. 2 qui contient les mêmes lettres. Observons que la fig. 2 est construite sur une échelle double de celle de la fig. 1; nous remarquerons aussi que dans la projection horizontale ou fig. 1, nous avons obtenu sans difficulté les points l, l', et que dans la fig. 2 nous ne pourrions obtenir que le point l', car le rayon KEO et sa projection *ken* sont divergens, et par conséquent ne peuvent pas s'entrecouper; nous serons donc obligés d'avoir recours au moyen indirect, en prenant sur D*e* un point *s*, dont la hauteur sera *s*S; par *k* et par *s*, nous mènerons une droite indéfinie qui sera la projection du rayon lumineux; ensuite par K et par S, nous mènerons le rayon jusqu'à ce qu'il coupe sa projection en *t* qui sera l'ombre de S, nous mènerons la droite D*t*, qui sera l'ombre de DS qui sera interceptée par le mur vertical en *u* et relevée sur ce même mur en *u*E, et dont la partie *v*E seulement sera visible dans le tableau. Maintenant nous allons nous occuper de la perspective des ombres produites par la lumière du soleil. (Pl. 33.)

Nous devons savoir que le soleil peut se trouver par rapport au tableau, dans l'un des trois cas que nous venons d'examiner. Nous savons encore que les rayons de cet astre relativement à son extrême distance de notre globe, peuvent être considérés sans erreur sensible, comme étant parallèles entre eux. Cette propriété, ainsi que nous l'allons voir, nous facilitera beaucoup les opérations sur la projection des ombres produites par la présence de cette lumière. Nous allons examiner successivement ces trois différens cas.

Premier cas. Lorsque le soleil est dans le plan du tableau, ou dans un plan qui lui serait parallèle, les projections horizontales et verticales de ses rayons, seront toujours parallèles entre elles dans le tableau. Soit *abcd*, la projection horizontale d'un cube éclairé par le soleil, et dont les rayons sont dans un plan parallèle à celui du tableau *ef*, et sont élevés de 50° au-dessus de l'horizon,

ou selon l'angle A*ag*. Les ombres des arêtes verticales de ce cube seront parallèles à la base *ef* du tableau (nous ne donnerons pas la manière de trouver ces ombres que nous devons connaître). Nous pouvons mettre cette projection horizontale en perspective, et nous aurons le résultat représenté dans le tableau efF et fig. 3 *bis*: ou bien si nous aimons mieux opérer directement sur ce tableau, nous supposerons la perspective du cube trouvée, nous ferons sur la base du tableau l'angle demandé G*he*, de l'inclinaison des rayons solaires; ensuite par chacun des points *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, nous mènerons des droites horizontales indéfinies, et par chacune des arêtes A', B', C', D', nous mènerons des rayons parallèles à G*h*, qui couperont les horizontales aux points *g'*, *k'*, *i'*, et les droites *ag*, *gk*, *ki*, *ic* seront les limites de l'ombre cherchée.

Deuxième cas. Nous supposerons dans la projection horizontale (fig. 2), que les ombres du cube *cd* ont été trouvées de la même manière que celles de la fig. 2, pl. 4, de la projection des ombres, dans laquelle la direction de la lumière est la même que celle du problème dont nous nous occupons, c'est-à-dire, selon la direction de la diagonale d'un cube, dont deux des faces sont parallèles au plan vertical ou du tableau *ab*. Si nous mettons cette projection horizontale en perspective, nous aurons le résultat figuré dans le tableau ax, ainsi que dans la fig. 2 *bis*. Si nous voulons opérer directement sur le tableau, nous observerons d'abord que les droites *ei*, *cdh*, *fg*, qui sont les ombres des arêtes verticales du cube *cd* (ou bien les projections horizontales des rayons solaires), font chacune un angle de 45° avec la base du tableau *ab*. Par conséquent, les perspectives de ces lignes dans le tableau, seront dirigées vers le point de distance K'. D'après cela nous mènerons donc de chacun des points *e'*, *c'*, *f'*, *d'* des droites au point K', et nous aurons les directions des ombres cherchées. Nous savons de plus que les rayons solaires sont parallèles entre eux, et qu'ils sont contenus dans des plans aussi parallèles entre eux et fai-

sant chacun un angle de 45° avec la base du tableau; nous savons encore que les lignes inclinées et parallèles entre elles, qui sont dans ces plans, doivent avoir leur point de fuite ou de concours dans la verticale menée par K'. Or, nous savons que dans ces cas-ci, les rayons sont parallèles à la diagonale du cube; menons donc cette diagonale C'*d'*, prolongée jusqu'à la verticale menée par K', et le point d'intersection *l* sera le point de concours des rayons solaires. Nous aurions pu trouver le point de fuite *l*, par le moyen indiqué fig. 2, pl. 9, que nous croyons utile de rappeler ici. Abaissons la distance *k*'K'; au-dessous de l'horizon de *k*' en K, menons la droite KK'; de K' abaissons une perpendiculaire indéfinie (que le défaut d'espace nous empêche de prolonger) au point K; faisons l'angle demandé K'K*m* (qui doit être ici celui de la diagonale du cube); menons la droite K*m* prolongée jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire abaissée de K', qu'elle coupera en un point L; nous prendrons la longueur KL', que nous porterons perpendiculairement au-dessous de l'horizon de K' en *l*, qui sera le point cherché.

Troisième cas (fig. 3 et 3 *bis*). *La lumière est située derrière le tableau.* Nous prendrons dans cet exemple la même inclinaison de lumière que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, selon la direction de la diagonale du cube; par conséquent, les projections horizontales de la lumière feront un angle de 45° avec la base du tableau *ab* ou ab, et les rayons feront avec le plan horizontal un angle égal à celui que ferait la diagonale du cube. Nous devons facilement voir que nous devons avoir le même résultat que celui de l'exemple précédent, mais en sens inverse. Ainsi K', point de distance, sera le point de fuite des projections horizontales des rayons, et *l* sera celui des rayons. Nous pouvons encore considérer le point *l* comme étant le lieu du soleil, et K' comme étant la projection horizontale de ce même soleil. Nous pouvons obtenir ces deux points de la même manière que ceux de l'exemple

précédent. Nous chercherons seulement l'ombre de l'une des arêtes du cube; par exemple, l'arête cC'. Par K', pied de la lumière, et par c', pied de l'arête, menons une droite indéfinie; par l centre du soleil, et par C menons une autre droite aussi indéfinie qui coupera la première en un point g', et la droite cg sera l'ombre de l'arête c'C. Il en sera de même pour les autres arêtes.

De la Perspective, lorsque l'œil du spectateur est supposé infiniment éloigné du tableau.

C'est d'après cette supposition que nous avons construit en projections perspectives la plupart des figures de cet Ouvrage, parce que non-seulement les opérations sont beaucoup plus faciles que celles de la perspective ordinaire (que nous venons de voir), mais encore parce que ces figures sont plus convenables pour faciliter l'intelligence des projections avec lesquelles nous n'étions pas encore familiarisés. Au reste, cette perspective si différente dans ses résultats, n'en est pas moins soumise aussi rigoureusement aux principes que nous venons d'exposer (*voyez* fig. 1, pl. 34).

Soient ab la projection horizontale du tableau, $cdef$ celle d'un carré posé dans le plan objectif, et ab la projection verticale de la base du tableau, dans lequel doit se trouver la perspective du carré $cdef$. Concevons que l'œil horizontal du spectateur soit situé dans le plan central (qui est ici le prolongement indéfini de la diagonale ec), et à une distance infiniment grande du tableau ab; dans cette supposition, les projections horizontales des rayons visuels menés des angles de la figure carrée à l'œil, seront parallèles entre elles et perpendiculaires à la base du tableau; telles sont les droites fi, eg, dh, etc. : ces lignes couperont le tableau ab aux points j, c, b; de chacun de ces points nous éleverons une verticale au tableau ab; ce sera dans chacune de ces lignes que devront se trouver les projections perspectives des différens points de la figure origi-

nale. Le point *c* qui se trouve situé sur la base *ab*, aura nécessairement sa projection perspective en c sur la base ab; il ne nous reste donc plus qu'à déterminer la hauteur de chacun des autres points dans le tableau, ce que nous ne pouvons faire qu'en déterminant d'abord la hauteur de l'œil.

Considérons la droite e*h* comme étant la section commune des deux plans de projection, et projetons sur cette ligne tous les points du carré; nous aurons *e* en e, *f* et *d*, en *d*, et enfin *c* en *b*. Prenons à volonté sur *bk* (que nous considérerons comme étant le profil vertical du tableau), un point tel que e′, et menons la droite ee′, laquelle étant prolongée à l'infini sera supposée passer par l'œil du spectateur et sera, par conséquent, le rayon visuel mené du point e à l'œil x, dont nous ne pouvons indiquer la position sur notre papier, position d'ailleurs de laquelle nous pouvons très bien nous passer; car, puisque le rayon visuel mené de e à l'œil, coupe le profil du tableau en e′, la droite *b*e′ sera la hauteur du point perspectif de e dans le tableau, hauteur que nous porterons sur ab, de c en *e*′; de *d* projection verticale de *f* et de *d*, menons un rayon visuel parallèle au premier, ce rayon coupera le tableau en de″, nous porterons la hauteur *b*e″ sur ab, de j en *f*′ et de b en *d*′, nous joindrons par des droites les quatre points que nous venons de trouver, et nous aurons la perspective cherchée. Cette figure, quoique rigoureusement en perspective, ne nous paraît cependant pas telle, puisqu'elle nous présente l'apparence d'une surface carrée posée verticalement sur le plan horizontal par l'un de ses angles, ce qui paraît en contradiction avec la projection horizontale qui nous indique que cette surface carrée est entièrement dans le plan horizontal. Nous aurions pu aisément éviter cet inconvénient en diminuant la hauteur de l'œil; mais nous étions bien aise de profiter du cas qui se présente pour faire sentir que lorsque l'œil est trop élevé, il en résulte les mêmes inconvéniens que lorsqu'on prend une distance trop petite. Nous

voyons en effet que la hauteur *be'* est égale à la droite *be* ou *ec*, longueur de la figure, et si e' eût été encore plus élevé ou plus éloigné de *b*, nous aurions eu une figure perspective dont le diamètre *ce'* aurait été beaucoup plus grand que celui *ce* de la figure originale, inconvénient qui peut rendre les objets tellement difformes, qu'ils sont méconnaissables, ce qu'il faut éviter avec soin.

Si nous voulons que la figure en perspective soit, en hauteur, la moitié, le tiers ou le quart de la figure originale, prenons cette partie sur la figure elle-même que nous porterons sur *bk* (par exemple, *cl* moitié de *ce*); de *b* en e'', nous mènerons le rayon visuel ee'', la droite *b*e'' sera la hauteur que nous porterons sur ab, de c en *e''* qui sera le point de la figure le plus élevé dans le tableau; ensuite nous mènerons le rayon *d*d parallèlement au premier ee'', ce rayon coupera le tableau en d; nous porterons la hauteur *b*d sur ab, de j en *f''*, et de b en *d''*, ce qui nous donnera la seconde figure c*d'' e''f''*.

La figure 2 représente le même sujet: seulement l'œil au lieu d'être dans le plan central, est situé un peu à gauche de ce même plan. L'opération est absolument la même.

La figure 3 présente absolument le même sujet et le même cas que le précédent, relativement à la position de l'œil. Nous considérerons seulement le carré en perspective comme étant la base d'un cube que nous nous proposons de construire. De chacun des angles de cette figure, élevons des verticales indéfinies, sur lesquelles nous porterons la hauteur que le cube doit avoir; dans cet exemple, ce sera un des côtés du carré de la figure originale, et nous mènerons les droites indiquées dans la figure. Remarquons que, dans cette troisième figure, nous n'avons pas eu besoin, pour construire le carré perspectif, d'employer les rayons visuels menés sur le profil du tableau, et en effet nous pouvons nous en dispenser, ce que nous ferons dorénavant; car il nous

suffit de savoir dans quel rapport la figure perspective doit être avec son original. Nous n'avons tout simplement qu'à prendre ce rapport sur la figure et le porter en ab, sur chacune des verticales; comme, dans cet exemple, nous avons décidé de prendre la moitié, portons cette moitié *cl* ou *e'f* sur ab, de g en e''; portons de même la moitié *e'f*, de f en f'' et de *y* en d''. Pour éviter les tâtonnemens dans la recherche des rapports pour chacun des points de la figure, nous nous y prendrons de la manière suivante. (Fig. 4.)

Le cercle *cdef* est la projection horizontale d'un cône droit à base circulaire, et dont l'axe aura pour longueur le diamètre du cercle de la base. Nous allons chercher la perspective de ce corps, par le dernier moyen que nous venons d'employer; seulement nous ne prendrons que le tiers du diamètre *ce* pour la hauteur de la figure perspective que nous nous proposons de construire, et pour abréger nous emploierons l'angle de réduction dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, mais que cependant nous croyons utile de rappeler ici. Sur un papier à part, nous mènerons une droite indéfinie sur laquelle nous porterons trois fois de suite une ouverture de compas prise à volonté, comme de *i* en 1, 2, 3; de *i* comme centre et avec *i*3 comme rayon, nous décrirons un arc indéfini 3 *l*, sur lequel nous porterons de 3 en *m* une des parties de *i*3; nous mènerons la droite *im*, et l'angle sera construit. Nous prendrons successivement la distance de chacun des points à la base *ab*, que nous porterons alternativement sur les deux côtés de l'angle depuis le sommet *i*, et l'intervalle entre les deux points ou la corde de l'angle sera la grandeur cherchée. Par exemple, voulons-nous avoir la hauteur du point *e* dans le tableau? prenons *ce* que nous porterons sur l'angle de *i* en *n* et en *o*, l'intervalle *no* sera le tiers de *ce*, que nous porterons sur ab, de x en *e*. Il en sera de même pour tous les autres points tels que *f*, *h*, *g*, *d*, etc. Il est surtout essentiel dans cette opération de déterminer

avec précision les deux points du diamètre *gh*, qui est limité, ainsi que nous le voyons, par les points de tangence des rayons visuels à l'œil.

Chaque fois que nous aurons un cercle à mettre en perspective de cette manière, nous pourrons abréger de beaucoup l'opération, en menant au diamètre *gh*, un autre diamètre *qr* qui lui soit perpendiculaire, et nous n'aurons plus qu'à chercher les quatre points des extrémités de ces deux diamètres, ce qui déterminera dans le tableau les deux axes d'une ellipse que nous pourrons terminer avec la règle de papier.

Enfin, nous pouvons encore simplifier cette opération; si nous n'avons pas commencé par ce nouveau moyen, c'est que nos lecteurs n'auraient pas pu comprendre sur quel principe ce moyen est fondé. Nous nous servirons du même carré qui est dans les figures 2 et 3, afin de mieux faire sentir l'avantage qu'il y a d'opérer par cette nouvelle manière. (Fig. 5.)

Soit donné un carré *abcd*, qu'il convient de mettre en perspective dans les mêmes rapports que ceux des figures 2 et 3. (Nous croyons inutile de rappeler que ce moyen peut s'appliquer à une figure quelconque.) Par *e*, milieu de la figure originale donnée, menons une droite horizontale *fg* et une verticale indéfinies sur un papier à part (s'il est nécessaire); menons deux semblables lignes; prenons par exemple sur la projection horizontale, la moitié de la distance *ae*, que nous porterons sur le tableau de *e′* en a; nous en ferons autant pour *ce*, ainsi que pour tous les points qui pourraient se trouver au-dessus ou au-dessous de *fg*, c'est-à-dire que nous rapporterons toutes ces mesures à cette même verticale. Par le même point *e′*, menons une droite plus ou moins oblique, et ce en raison ou selon que nous voudrons voir la figure plus ou moins de côté; prenons ensuite la distance de *e* à *d*, que nous porterons sur *f′ g′*, de *e′* en *d′*: nous en ferons autant pour *b*, ce qui nous donnera *b*; par a et par c, menons une horizontale à droite

et à gauche, qui coupera l'oblique en a' et en c': ces deux points seront les perspectives des points originaux a, c; nous joindrons ces points par des droites, et nous aurons la figure demandée.

La fig. 7 est un second exemple de cette manière abrégée, et représente un prisme hexagonal, vu un peu moins de côté que le carré de la figure précédente, et qui n'a en hauteur que le tiers de la figure originale.

Nota. Dans cette dernière figure nous nous sommes servi de l'angle de réduction.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

Applications des principes ci-dessus à la Géométrie pratique.

LIVRE SECOND.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Du Cône.

De la Sphère.

LIVRE TROISIÈME.

DE LA LUMIÈRE, DES OMBRES ET DES COULEURS.

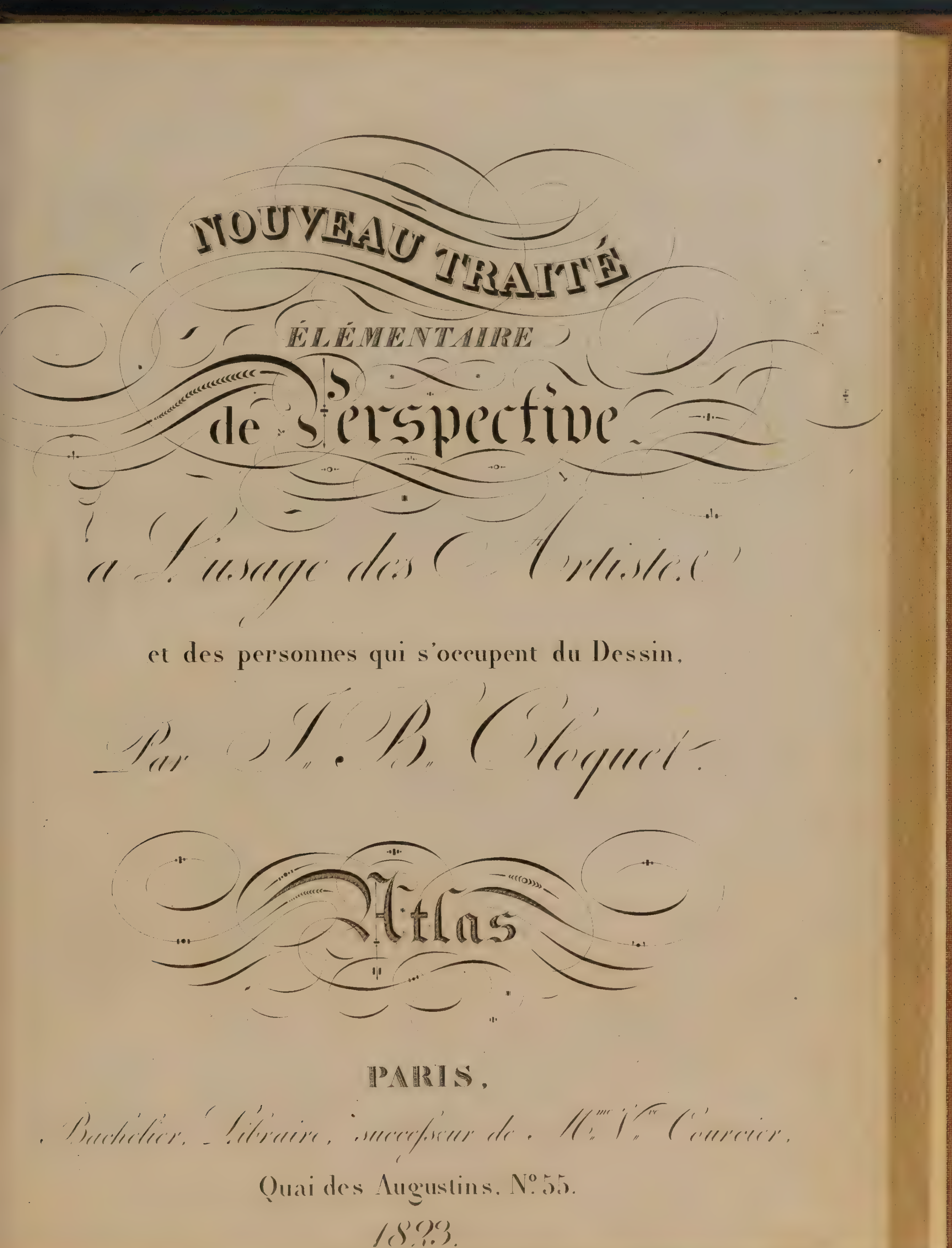
LIVRE QUATRIÈME.

LIVRE CINQUIÈME.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pag, 18,	ligne 10,	égal 6, *lisez* égale 6
27,	1,	circonférence : *supprimez* les deux points
Id.	14,	du tiers de la grande, *lisez* du huitième
31,	25,	en *a*, *lisez* en A
47,	3 et 4 en remontant,	A*eg*, *lisez* AE*g* ; côté *ge*, *lisez* *g*E
51,	avant-dernière,	une droite *af*, *lisez* *fb*
53,	20,	etc., *supprimez* la virgule et *lisez* Au-dessous
54,	5 en remontant,	*kl′*, *lisez* kl
Id.	*id.*,	*c*, *lisez* C
57,	Prob. 15,	*ab*, *bc*, *lisez* *ab*, *cd*
61,	dernière,	on ajoutera, *lisez* on ajustera
63,	Prob. 25,	inscrire, *lisez* construire
64,	5 en remontant,	de *ab′*; *lisez* de *a′b′*
67,	20,	*bc*, *lisez* *cd*
70,	3,	*gh*, *lisez* *fh*
Id.	13,	*gh*, *lisez* *fh*
74,	7,	fig. 5 et 1, pl. 2, *lisez* fig. 5, pl. 1 et fig. 1, pl. 2
Id.	2 en remontant,	le plan *eg*, *lisez* *ef*
77,	26,	AB, *lisez* A*b*
Id.	29,	a*b*, *lisez* a, b
Id.	30,	a*b*, *lisez* a*b′*
81,	5,	*ab*, *ab′*, *lisez* *ab*, *a′b′*
82,	8,	la projection, *ajoutez* horizontale
Id.	19,	horizontale, *lisez* verticale
Id.	24,	*d'un point*, *lisez* *d'un point c′*
84,	2,	AEC″, *lisez* AE″C
85,	4 en remontant,	GI, *lisez* HI
88,	10,	*g*D, *lisez* CD
Id.	21,	*e*, *lisez* *e′*
89,	3,	hgDD′, *lisez* hgD′
91,	8,	seraient, *lisez* serait
97,	21,	50°, *lisez* 47°
98,	2 et 3,	CA, CB, *lisez* *c*A, *c*B
100,	4,	BF, *lisez* b, f
Id.	18,	*bc*, *dc*, *lisez* *b*C′, *d*C′
105,	1,	en *k*K″, *lisez* de *k* en K″
107,	23,	de *e*, *lisez* *e′*
115,	22,	ou égale, *lisez* ou sa largeur sera
122,	10,	*h′g*, *lisez* *h′g′* *kg′*, *lisez* *k′g′*
123,	24,	n, *g′*, *lisez* n*g′*
124,	19,	*bac*, *lisez* *bag*
Id.	dernière,	*bac*, *lisez* *bag*
127,	19,	ou *e*, *lisez* ou *e′*
131,	27,	*y*, *u*, 2, *lisez* *cu*, *y*2
Id.	28,	en *z*, *lisez* en 2
132,	Prob. 35.	*Un point*, lisez *Un point a ou a′*
133,	16,	*a′a″* *lisez* *a′*, *a″*
142,	11,	*gh*, *lisez* *g*, *h*
Id.	24,	est la projection, *lisez* est projetée selon la ligne XZ
143,	19,	*pp′*, *lisez* *p*, *p′*
150,	4 en remontant,	N, *lisez* N, m
156,	26,	*c′*D′*a′*, *lisez* *c′*D′ pour la base, et *a′* pour le sommet
159,	12,	en *a*, *lisez* en *a′*
163,	dernière,	*cd*, *lisez* *bc*
171,	10,	fig. 4, *lisez* fig. 5
204,	11,	plans *c*, *lisez* plans : *c*
206,	25,	de sera, *de* sera
207,	5 en remontant,	en *l*, *lisez* *l″*
215,	13,	Eb, *lisez* Ed
Id.	14,	b, *lisez* d
216,	19,	*cx*, après ces deux lettres, *lisez* l'ombre de la droite *c*C, serait *cx*, dont, etc.
219,	dernière,	*l*, *g*, *lisez* *lg*
220,	12,	*fd*, *lisez* *fb*
221,	22,	H′*i′*, *lisez* H′*i*
252,	18,	AB, *lisez* AB,
253,	avant-dernière,	fig. 2, *lisez* de la pl. 2
265,	13,	après fig. 2, *lisez* pl. 7
271,	3 en remontant,	du tableau, *lisez* au tableau



NOUVEAU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE de Perspective

à l'usage des Artistes

et des personnes qui s'occupent du Dessin,

Par J. B. Cloquet.

Atlas

PARIS,

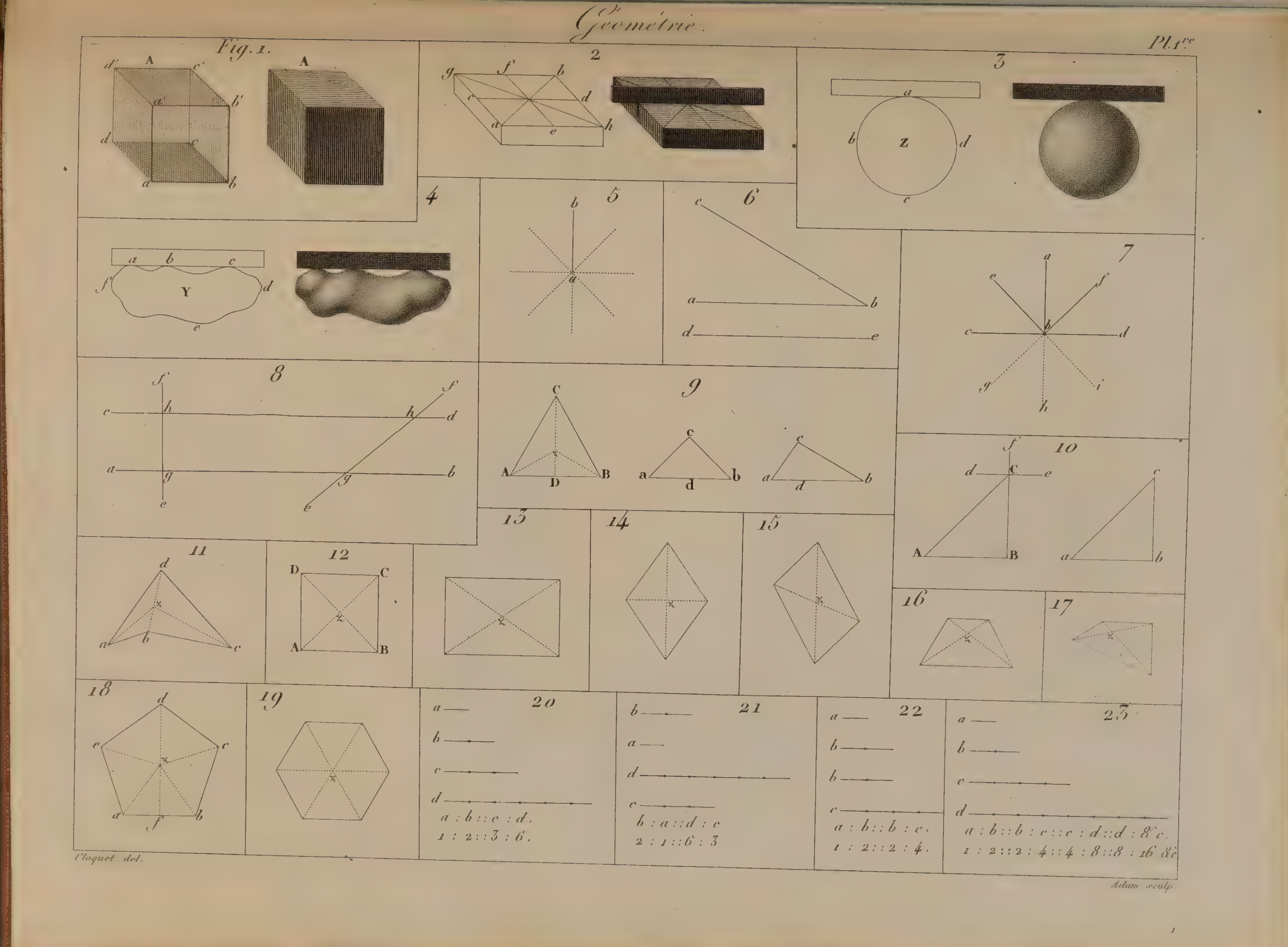
Bachelier, Libraire, successeur de Mme Ve Courcier,

Quai des Augustins, No 55.

1823.

Géométrie.

Pl. 1.re



Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12. 1° 2°

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1re 3° 4° 5°

2

3

bis

4

5

6

bis

7

8

9

10

11

12

13

Cloquet del. Adam sculp

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1re.

2

3

4

5

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

2

3

4

5

6

7

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

Cloquet del.

Adam sculp.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

2

3.

4

5

6.

La Fig. 6 bis est Pl. 8.

Cloquet del.

Adam sculp.

6. bis

Fig. 1.re

2.

3.

4

4 bis

Projection verticale selon la Ligne 1, 2, de la Fig. 4

Choquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

2.

3.

Cloquet del.

Adam sculp.

Géométrie Descriptive.

Fig. 1.re

2.

5.

4.

3.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1ère

2.

3.

4.

Poquet del. Adam sculp.

Fig. 1re

2.

2 bis

3

4

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

2.

3.

4.

Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

2.

3.

4.

5.

Cloquet del.

Adam sculp.

Géométrie Descriptive.

Fig. 1.re

2.

3.

4.

5.

6.

7.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re.

2.

3.

4.

5.

6.

Cloquet del.

Adam sculp.

Géométrie Descriptive.

Fig. 1re.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

Cloquet del. Adam sculp.

Géométrie Descriptive.

Pl. 18.

Fig. 1re

2.

3

4.

5

6.

Cloquet del.

Adam sculp.

24

Fig. 1re

2.

3.

4.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1.re

2

3

Cloquet del.

Adam sculp.

Optique.

Fig. 1.

E′ F′ G′ H′ C′ D′ c′ d′ g′ h′ e f g h c d x y b 1 2 3

2.

a 1 2 3

3.

4.

a b c e e′ e″ f f′ f″ g

5.

1 2 3 4 5 6 7 8

Cloquet del.

Adam sculp.

Optique.

Pl. 2.

Fig. 1.

2.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

2.

3.

Cloquet del. Adam sculp.

Optique.

Fig. 1.

2.

3.

4.

5.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

A d h a e c g b

2.

c a b d

3

a i m b c d e g k f j l h

4

a b c d e f g

Cloquet del. Adam sculp.

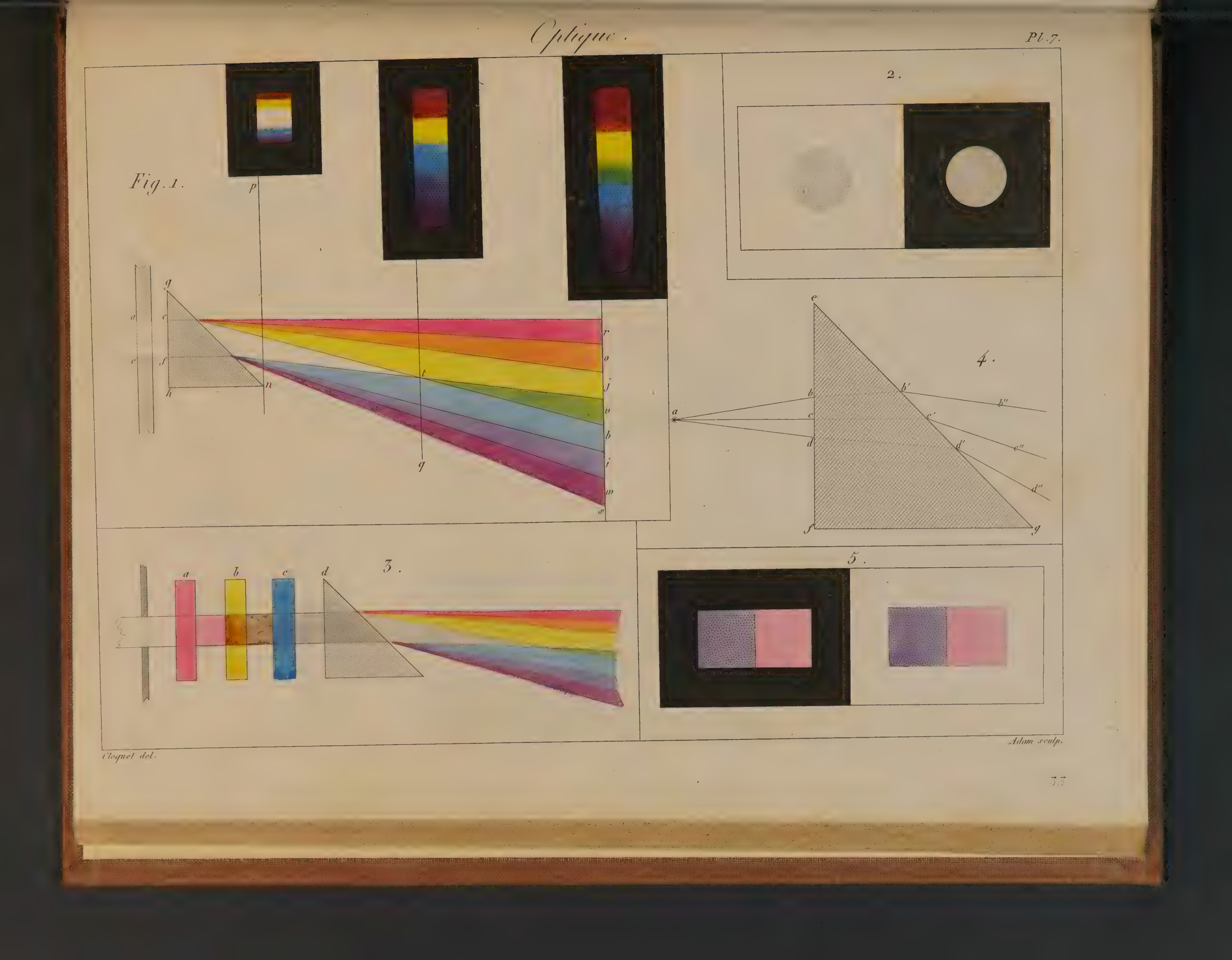
Fig. 1re

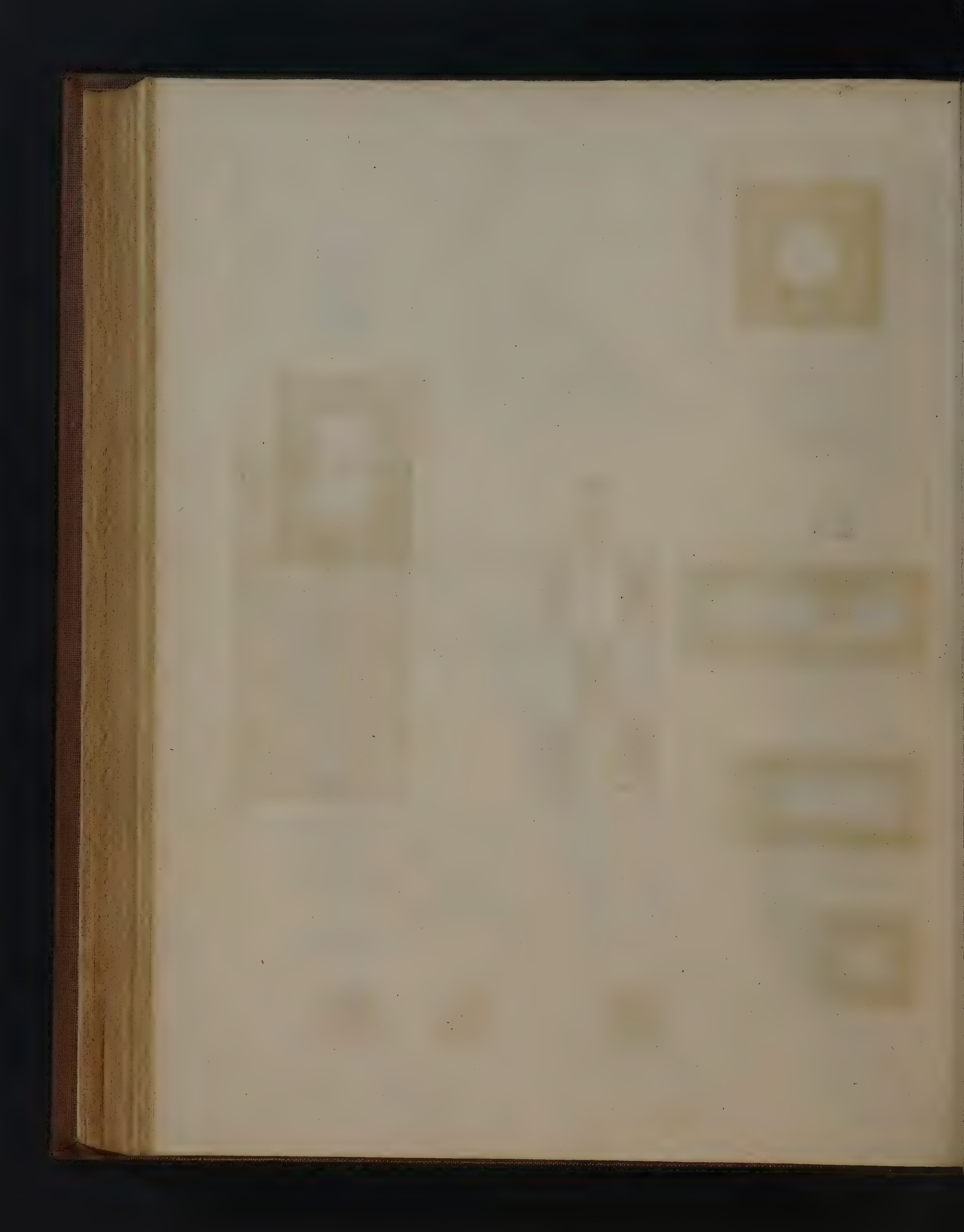
2.

3.

4

Cloquet del. Adam sculp.


Optique.
Pl. 7.
Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
Cloquet del.
Adam sculp.



Optique.

Fig. 1.

1 2 3 4 5

2.

3.

4.

5.

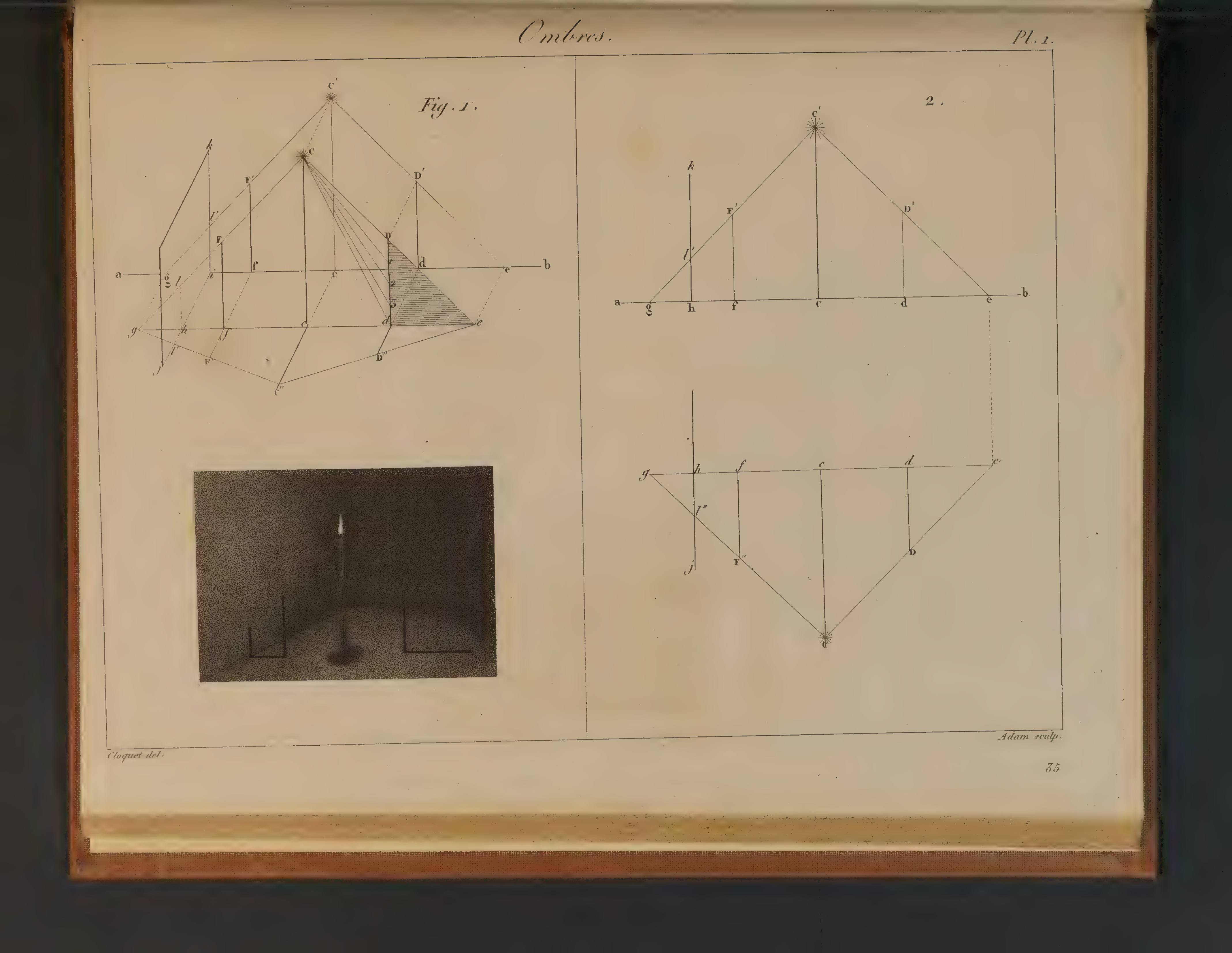
6.

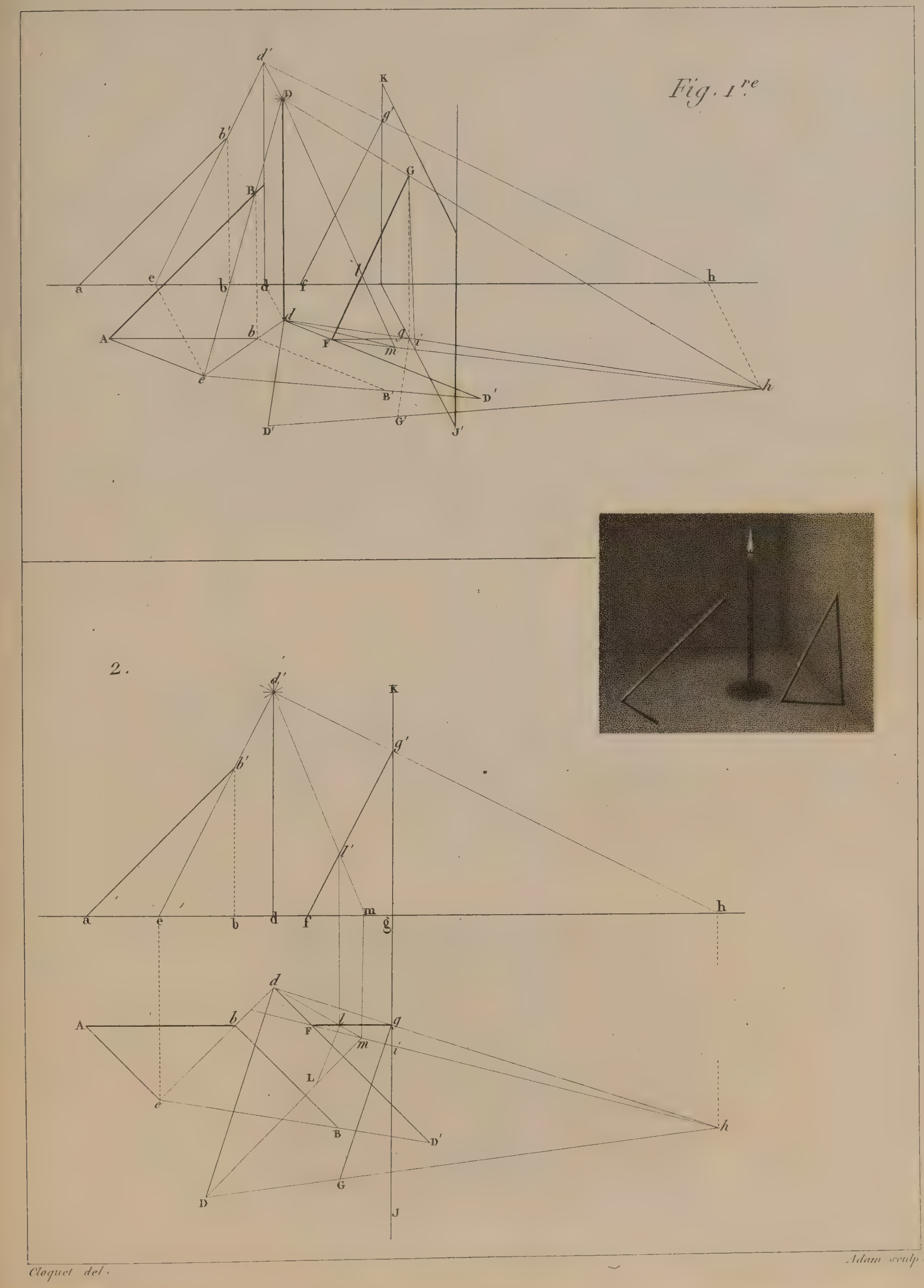
7.

8.

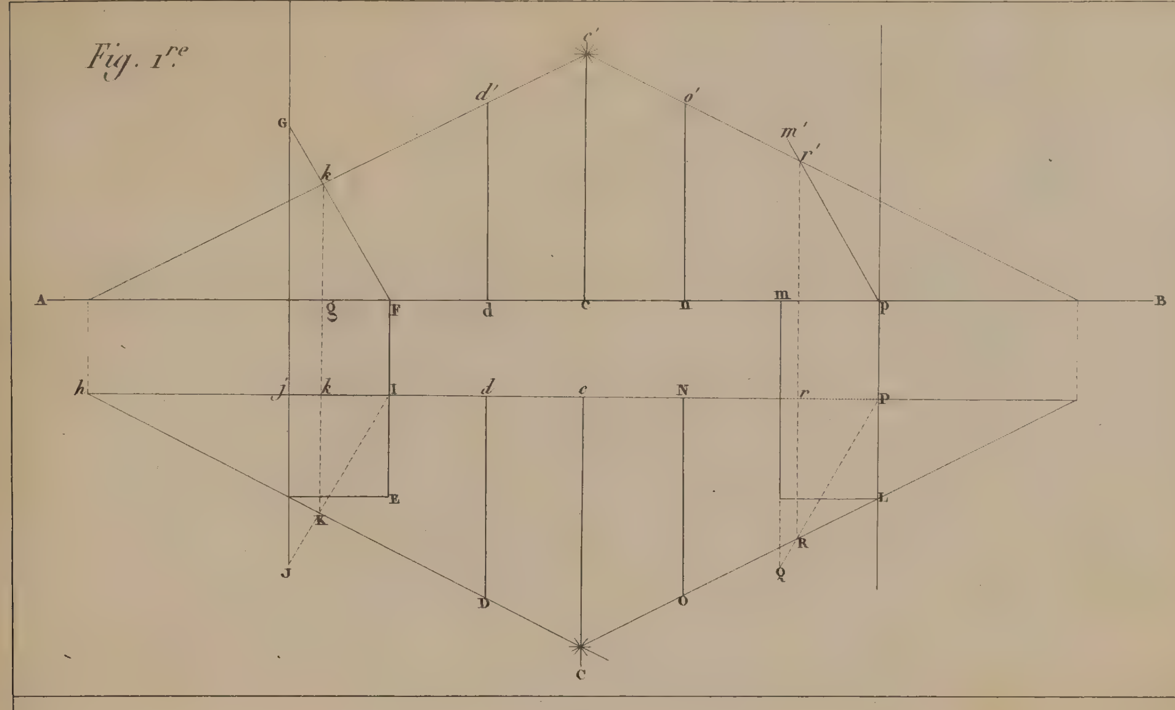
Cloquet del.

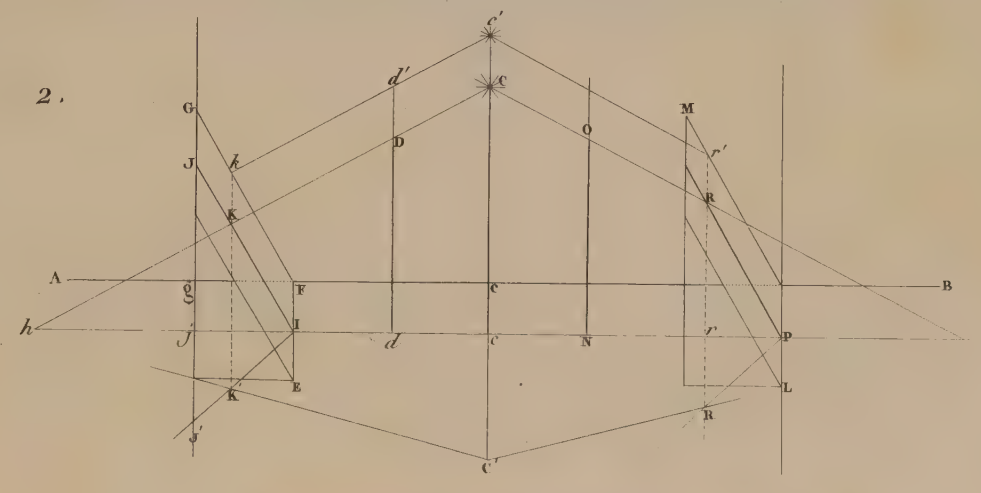
Adam sculp.

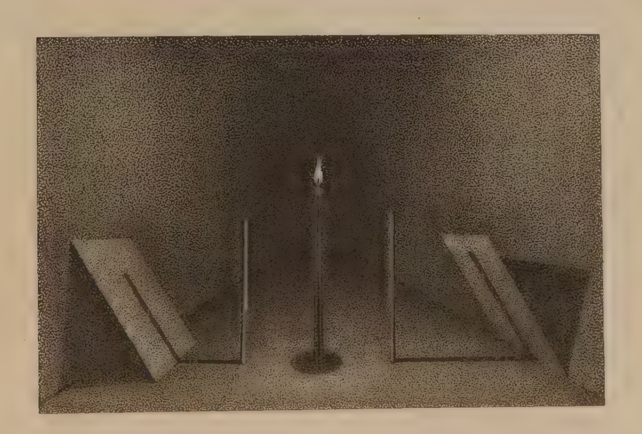

Ombres.
Pl. 1.
Fig. 1.
2.
Cloquet del.
Adam sculp.
35



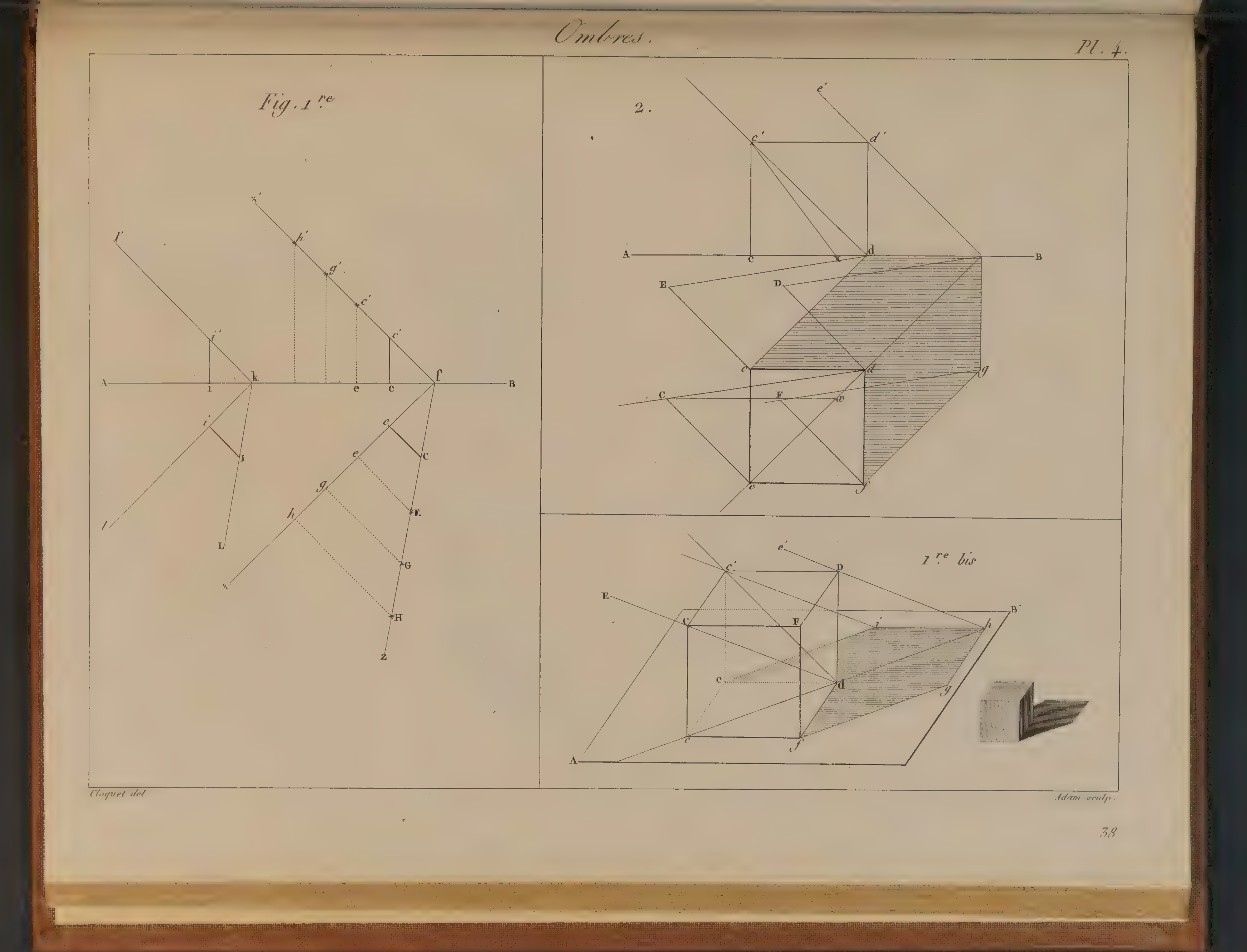
Cloquet del. Adam sculp.

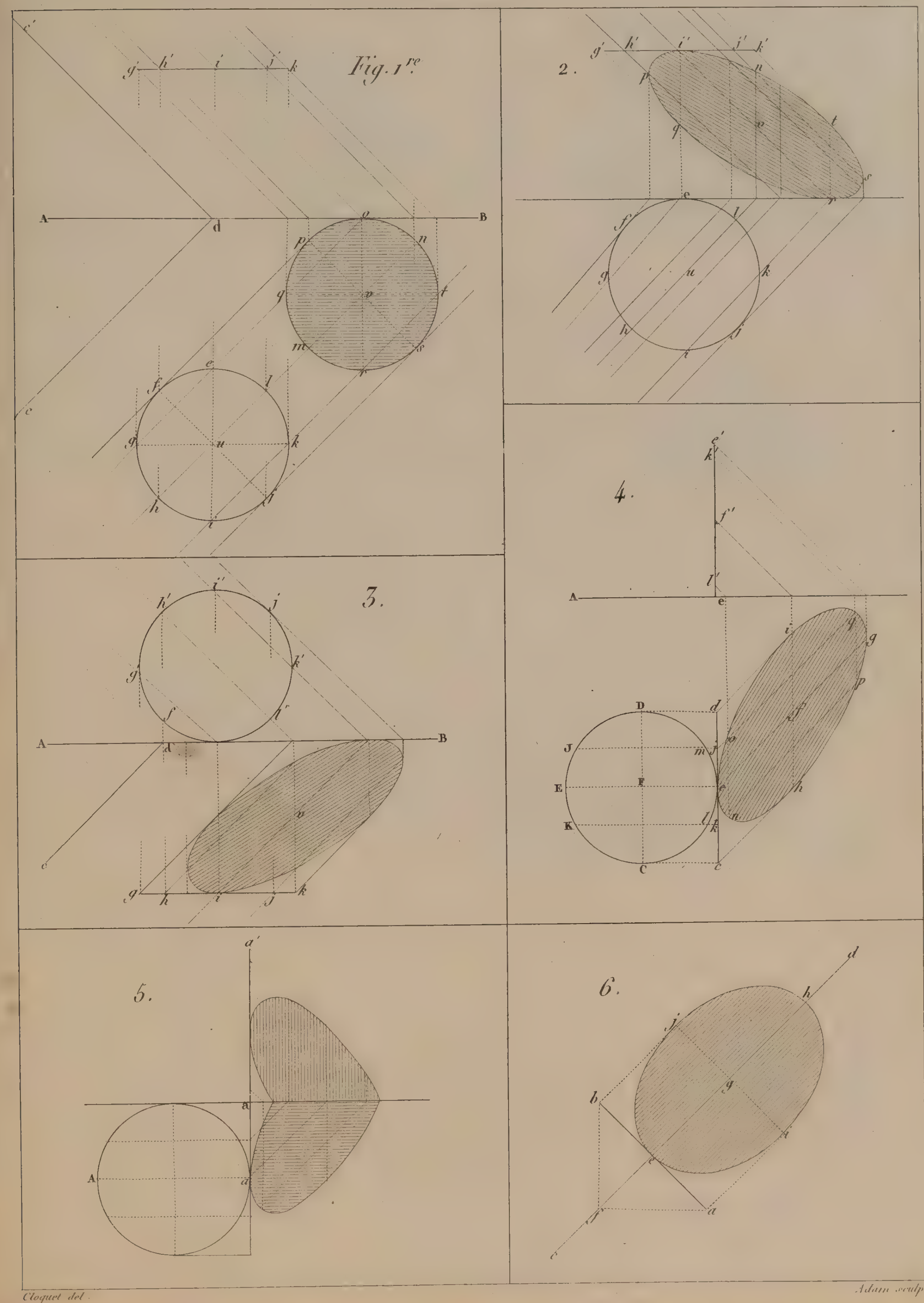






Cloquet del. Adam sculp.


Fig. 1.re
2.
1.re bis
Cloquet del.
Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

2.

3.

4.

5.

Cloquet del.

Adam sculp.

Ombres.

Fig. 1re.

2.

3.

Cloquet del.

Adam sculp

Fig. 1re.

2.

3.

Cloquet del.

Adam sculp.

Ombres.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1.re

1.re bis

2.

3.

4.

5.

6.

Piquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

2.

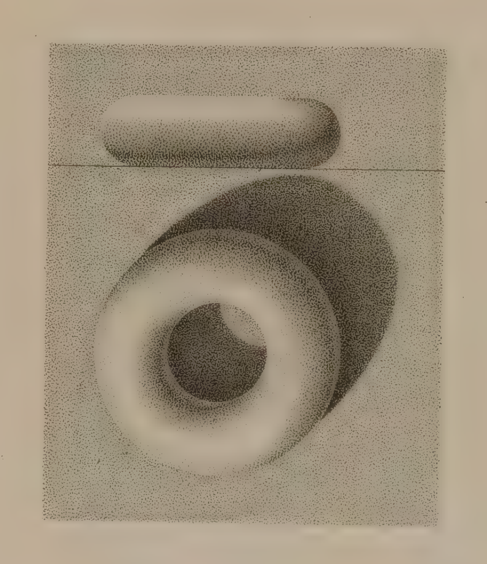
3.

4.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re.



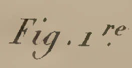
Cloquet del.

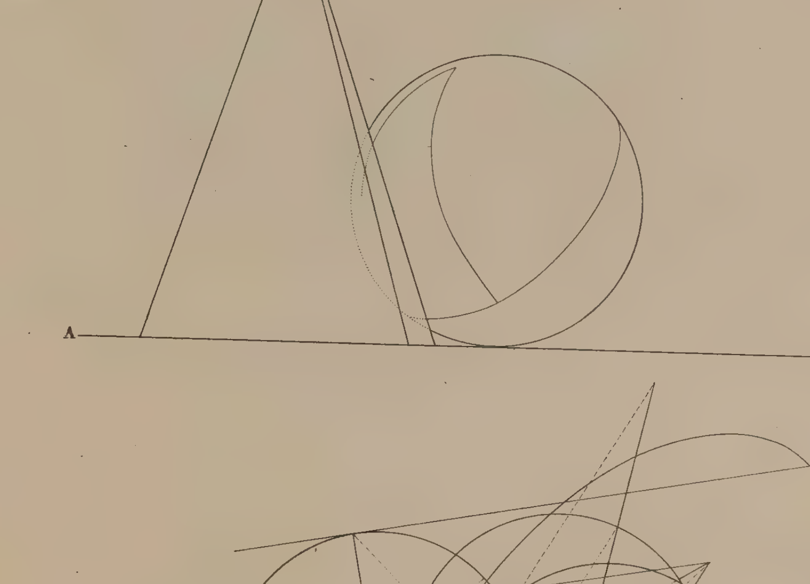
Adam sculp.

Fig. 1re

Cloquet del.

Adam sculp.





Cloquet del.

Adam sculp.

Ombres.

Cloquet del. Adam sculp

Ombres.

2 bis

2

3

Fig. 1.re

Jacquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re.

a c d b

2

a 1 2 3 4 5 b c

3

A' A e a a' b' b 3' 3 f g c b b' 3 a' a B' B d

4

e' b' m l' M L a' a' x e f K I d y A a G H C a D A' b B

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1.re

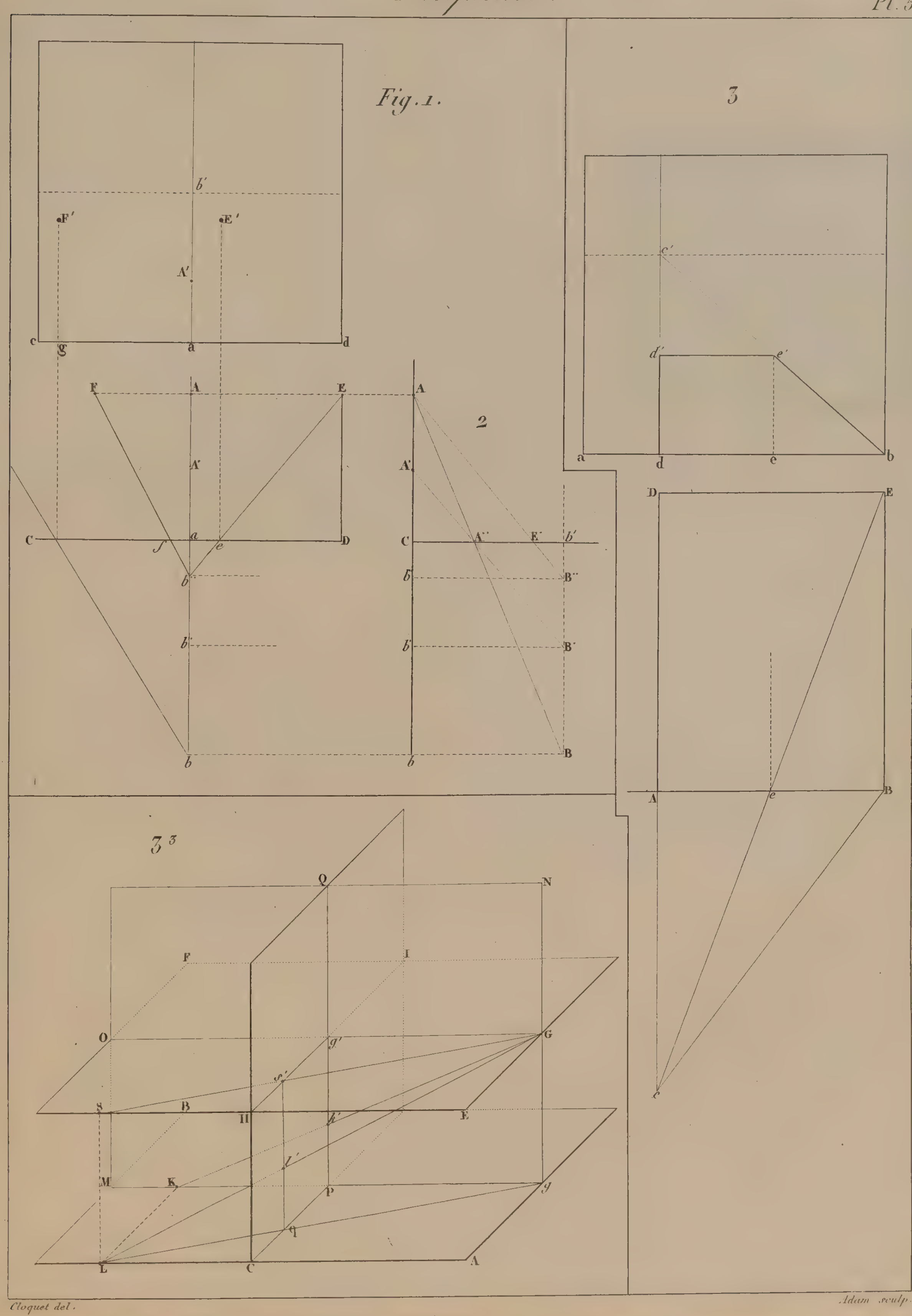
2

3 bis

3

La Fig. 3 bis est projetée selon la ligne M g, et sert aussi à la Fig. 3.e Pl. 3.

Cloquet del. Adam sculp



Cloquet del.

Adam sculp.

Perspective.

Fig. 1.re

2.

3.

Cloquet del.

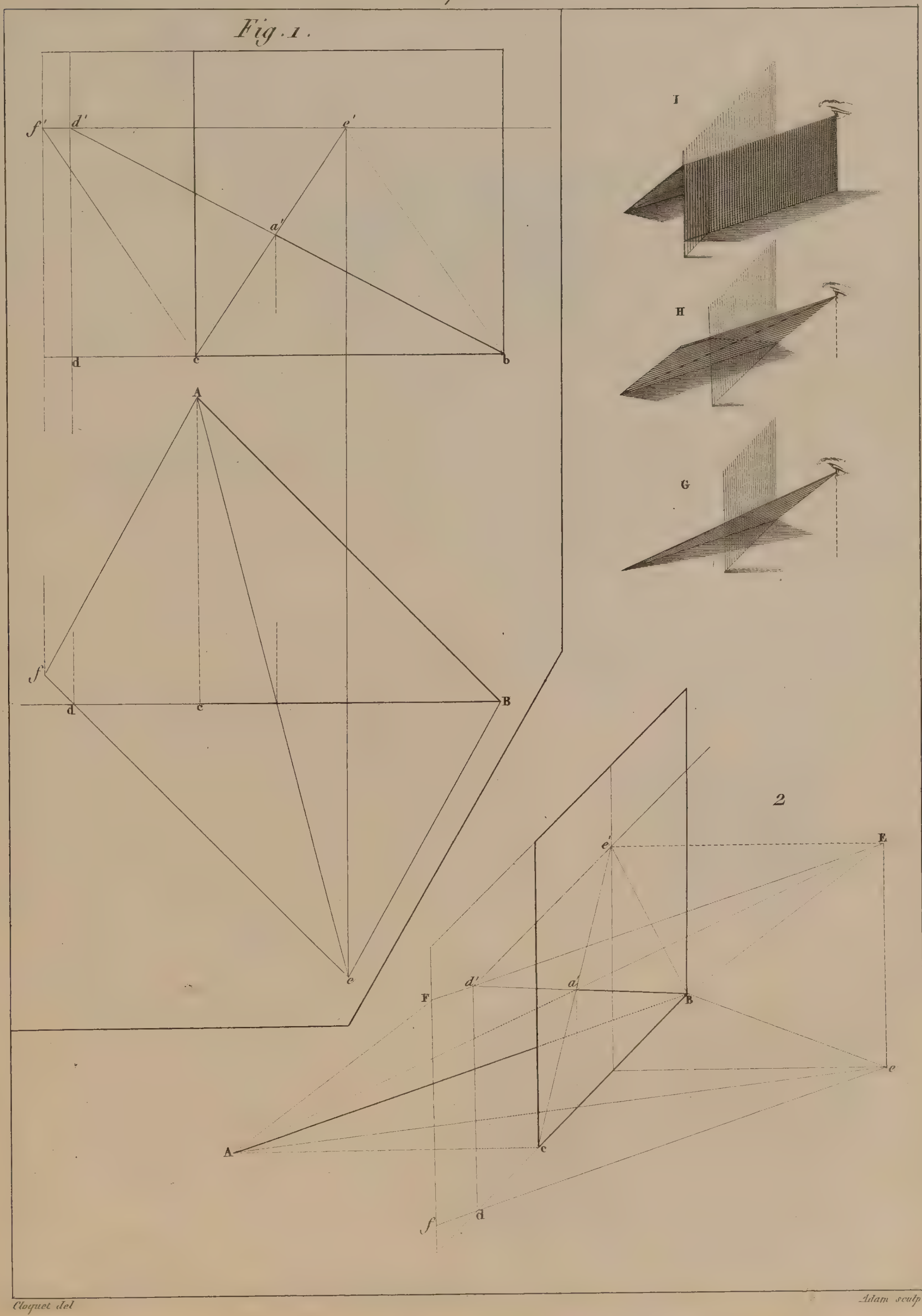
Adam sculp.

Fig. 1.

2

Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

H.

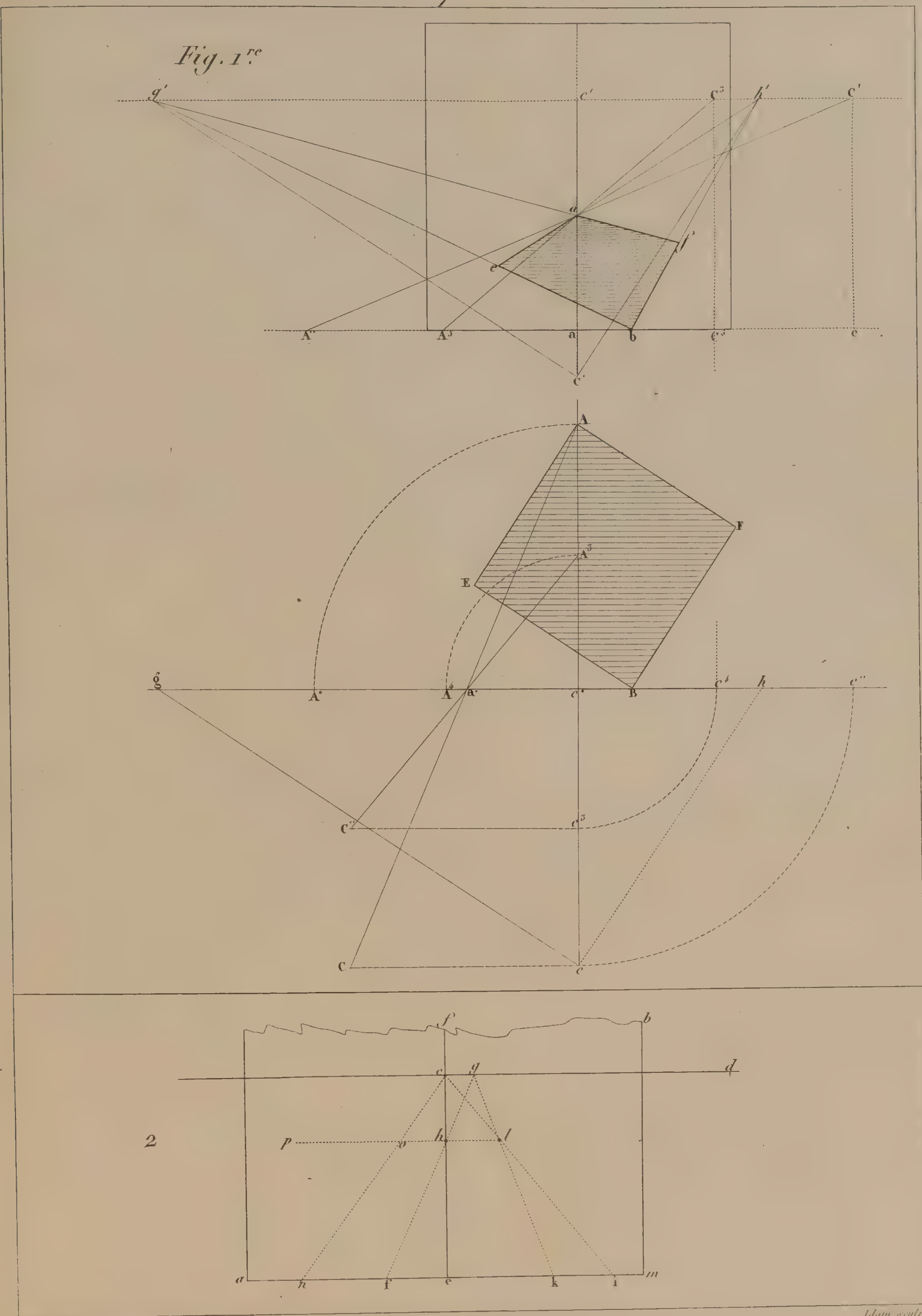
I.

G.

2

Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del.
Adam sculp.

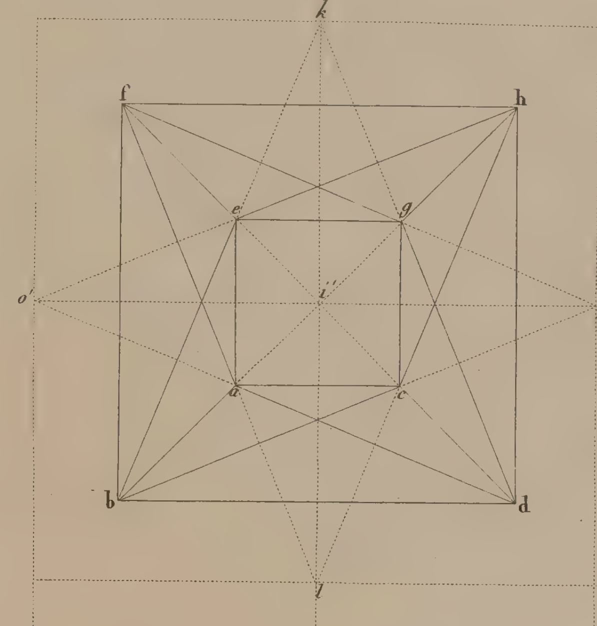
Fig. 1.re

2

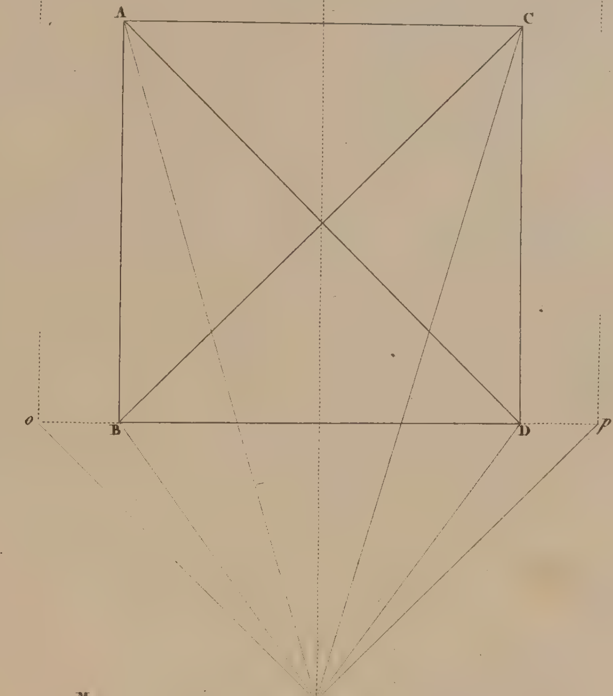
Cloquet del.

Adam sculp

Fig. 1.re







Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

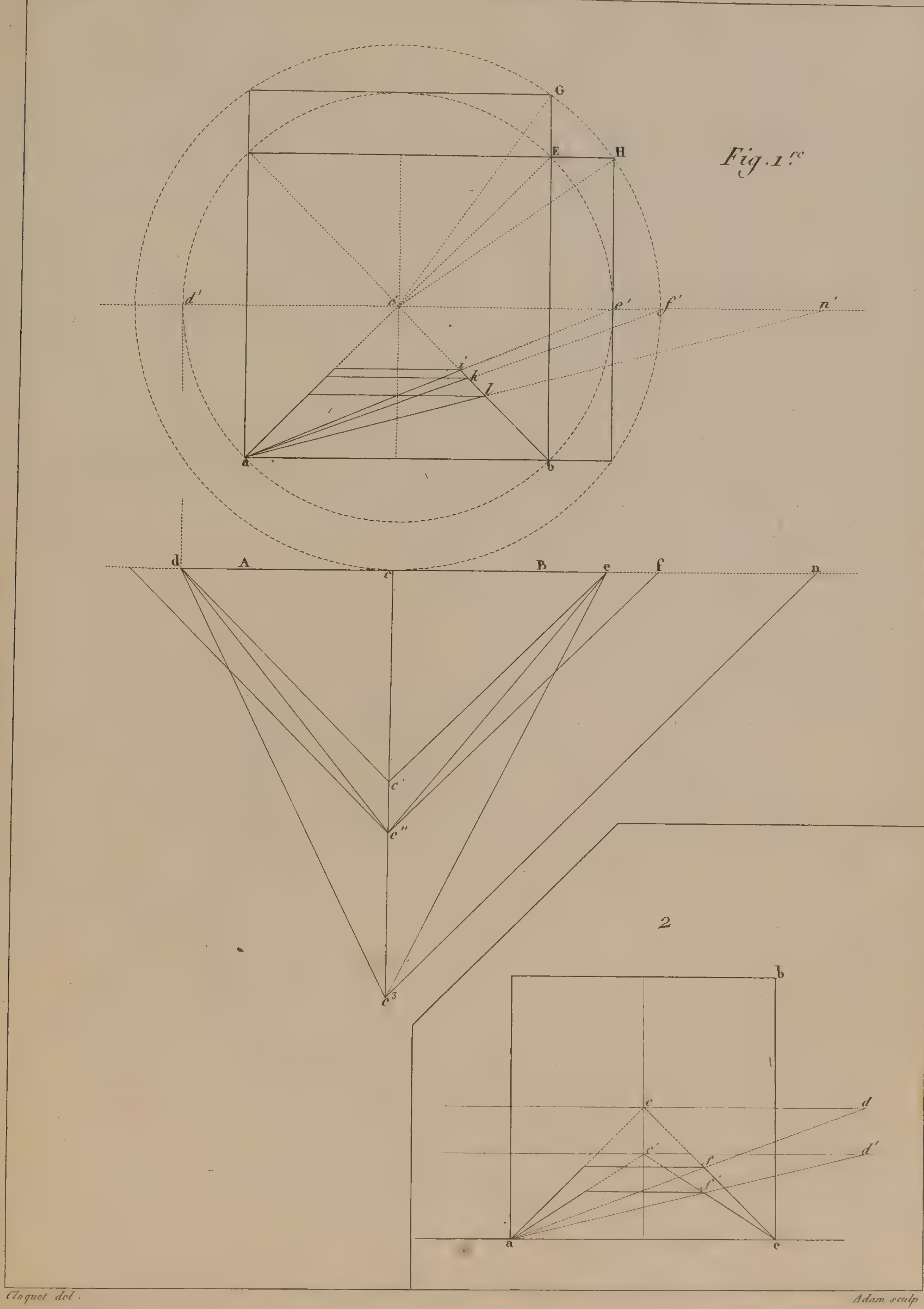
E
C
H
A
e'
c
a
F
c'
c
a'
e
a
D
f
B

2

E'
a
c
c'
a'
c'
y
b
d
e
A'
a
c
A
C
x
B
D
e
E
F
f

Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

1.

C' c' C h g i f e d a b H G I F E D A B

4.

b' b' h H c g f e a b a b A B

2.

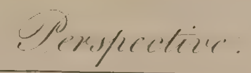
b f e' d c e g i h 1 2 3 A D B

3.

B b C 3 2 1 A

Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

1.

2.

3.

Cloquet del.

Adam sculp.

Fig. 1re

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32

i

b g h a c

2.

F' f' F

k g

i

a b c d e

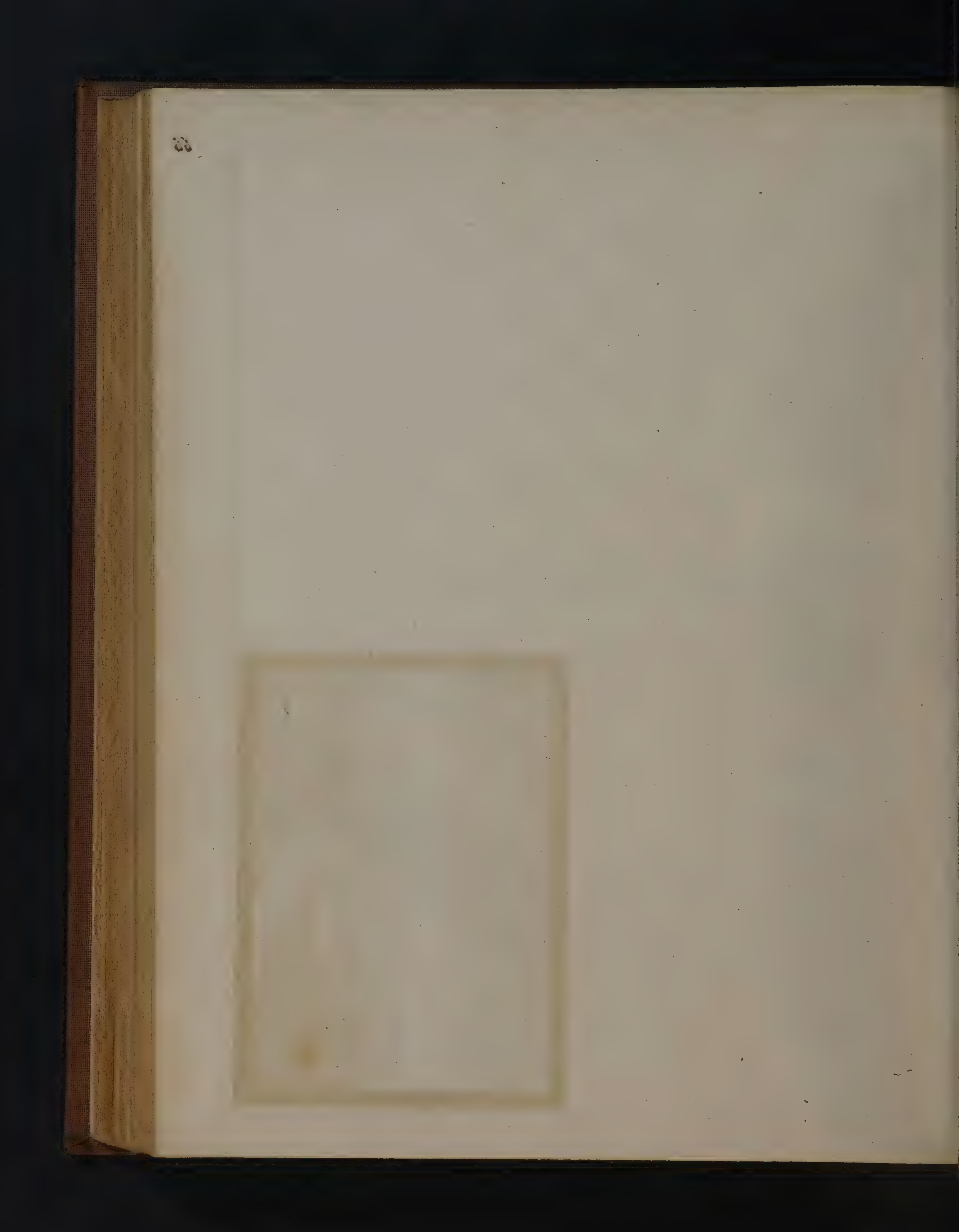
h

A B C D E

f

Cloquet del. Adam sculp.

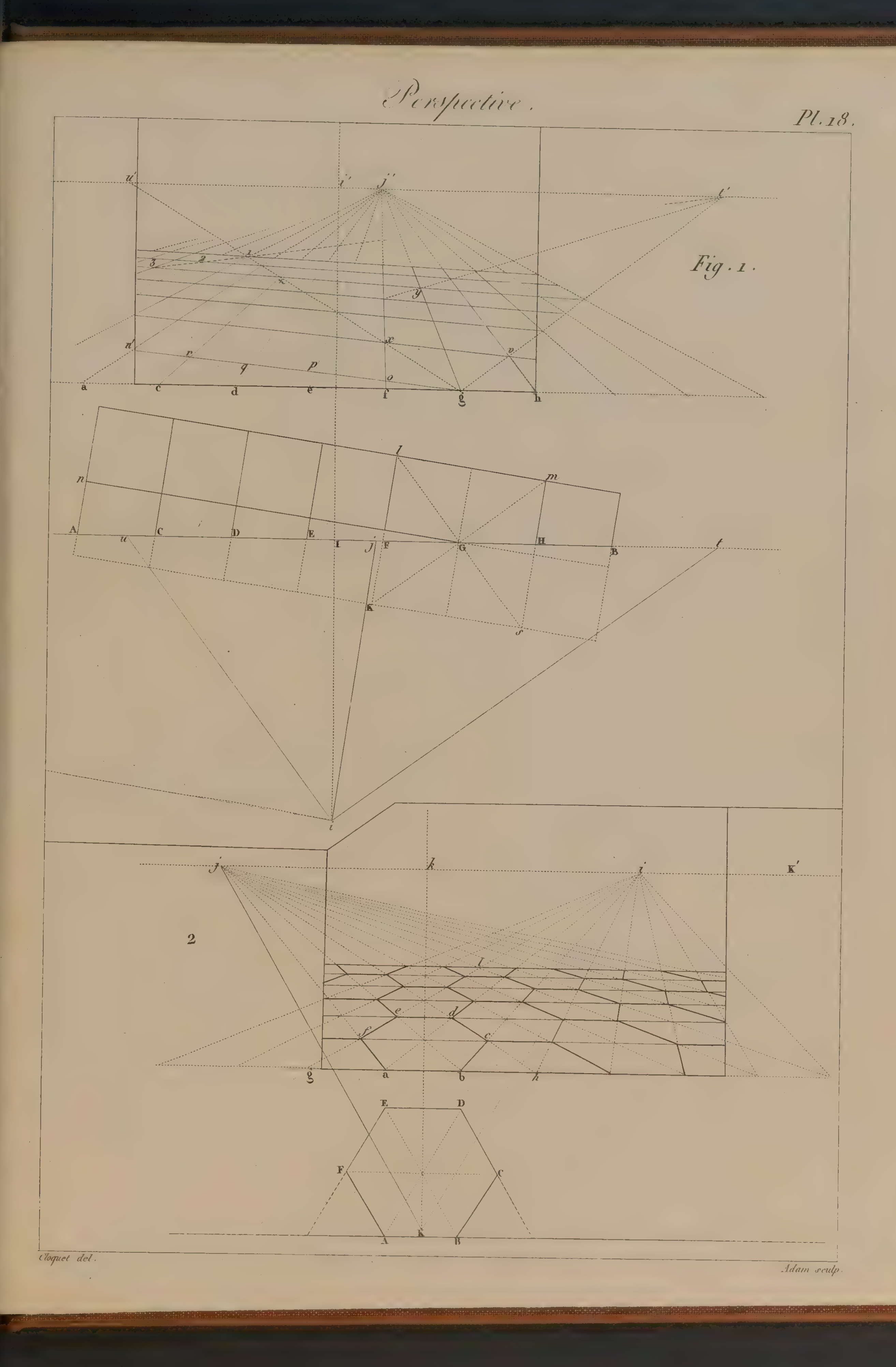
66



Perspective.

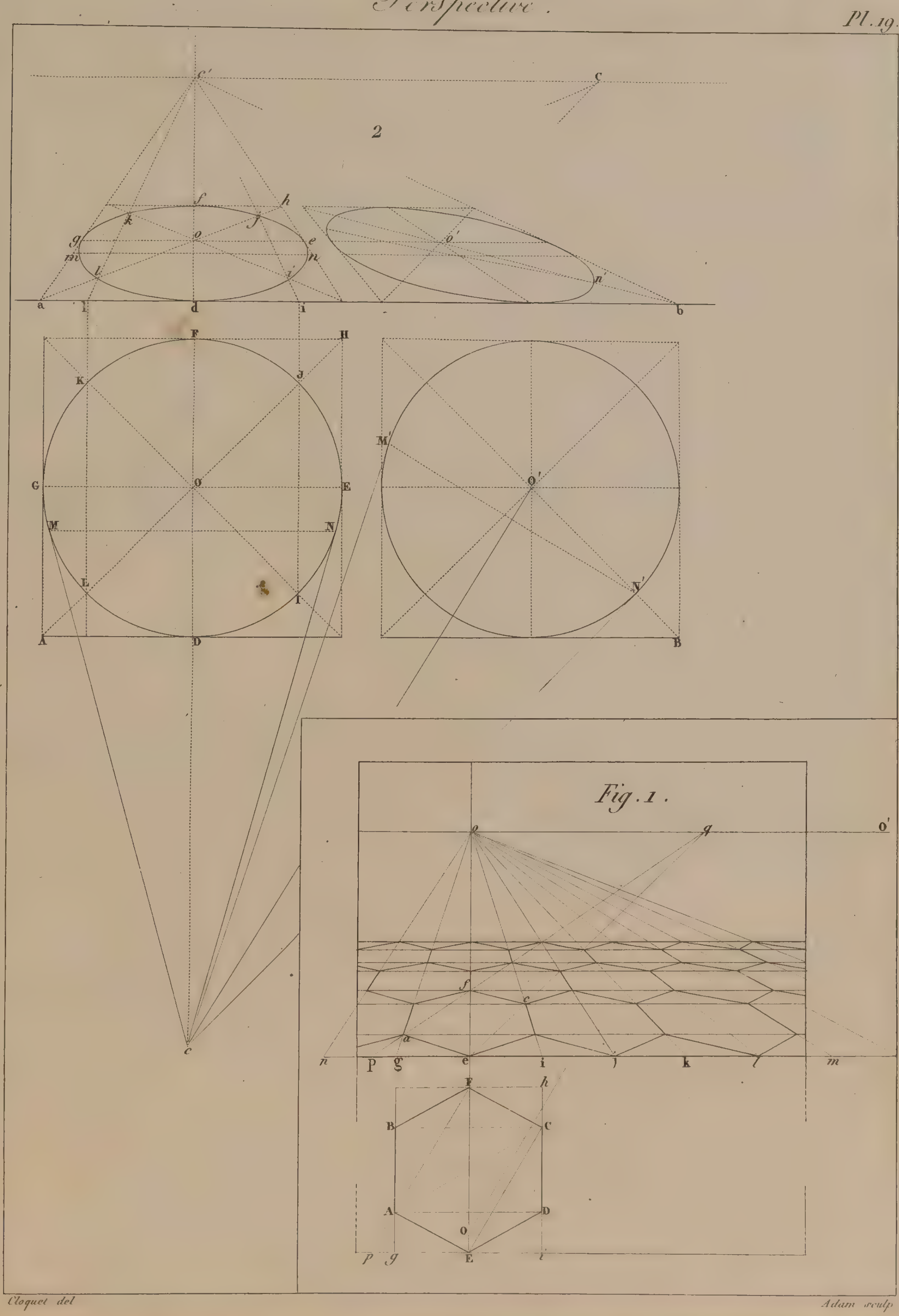
Pl. 17

Cloquet del. Adam sculp.



Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

Fig. 1.re

2

3

Cloquet del.

Adam sculp

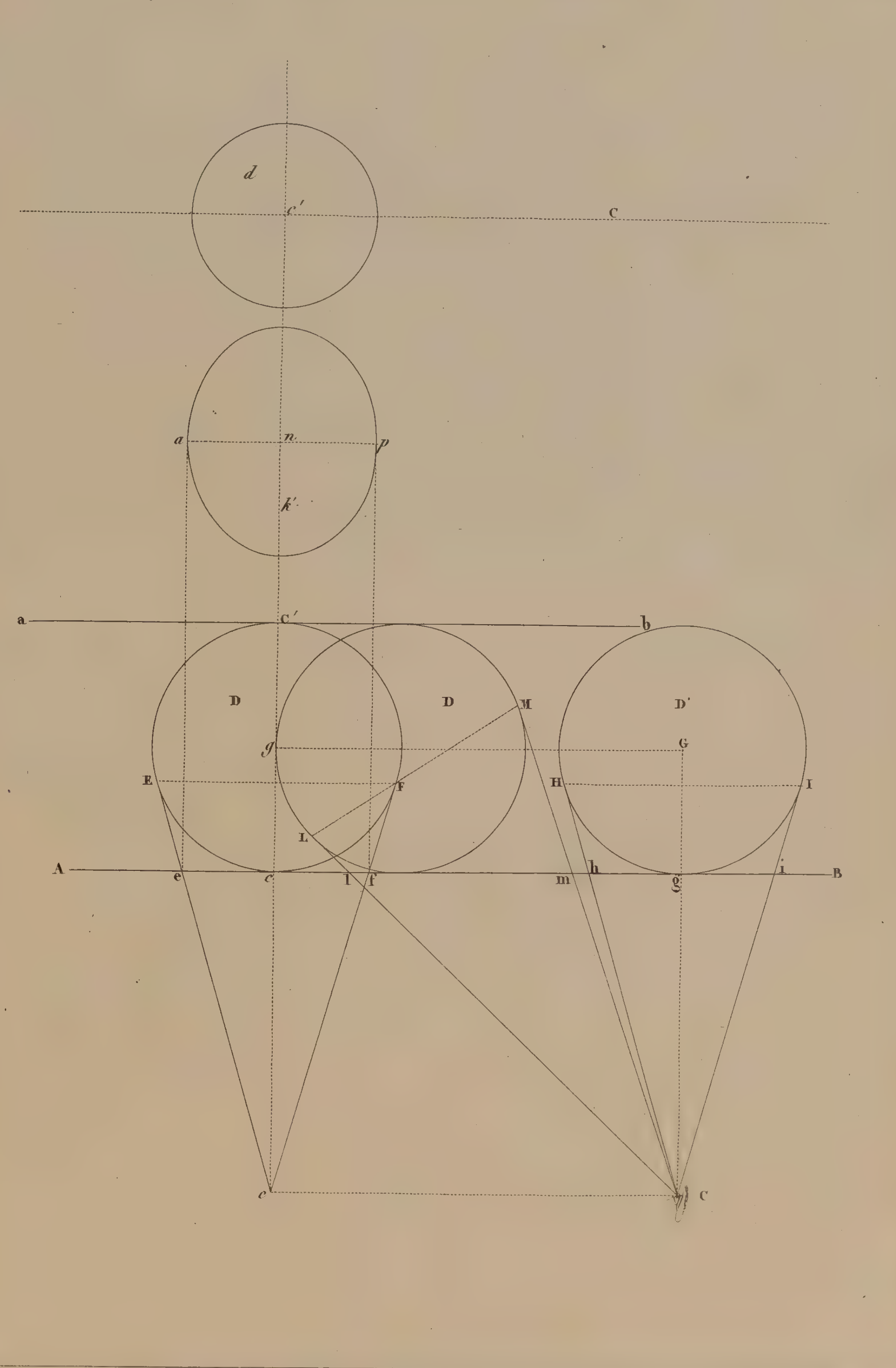
Fig. 1.

Cloquet del. *Adam sculp.*

Cloquet del.
Adam sculp.

Cloquet del.

Adam sculp.



Cloquet del.

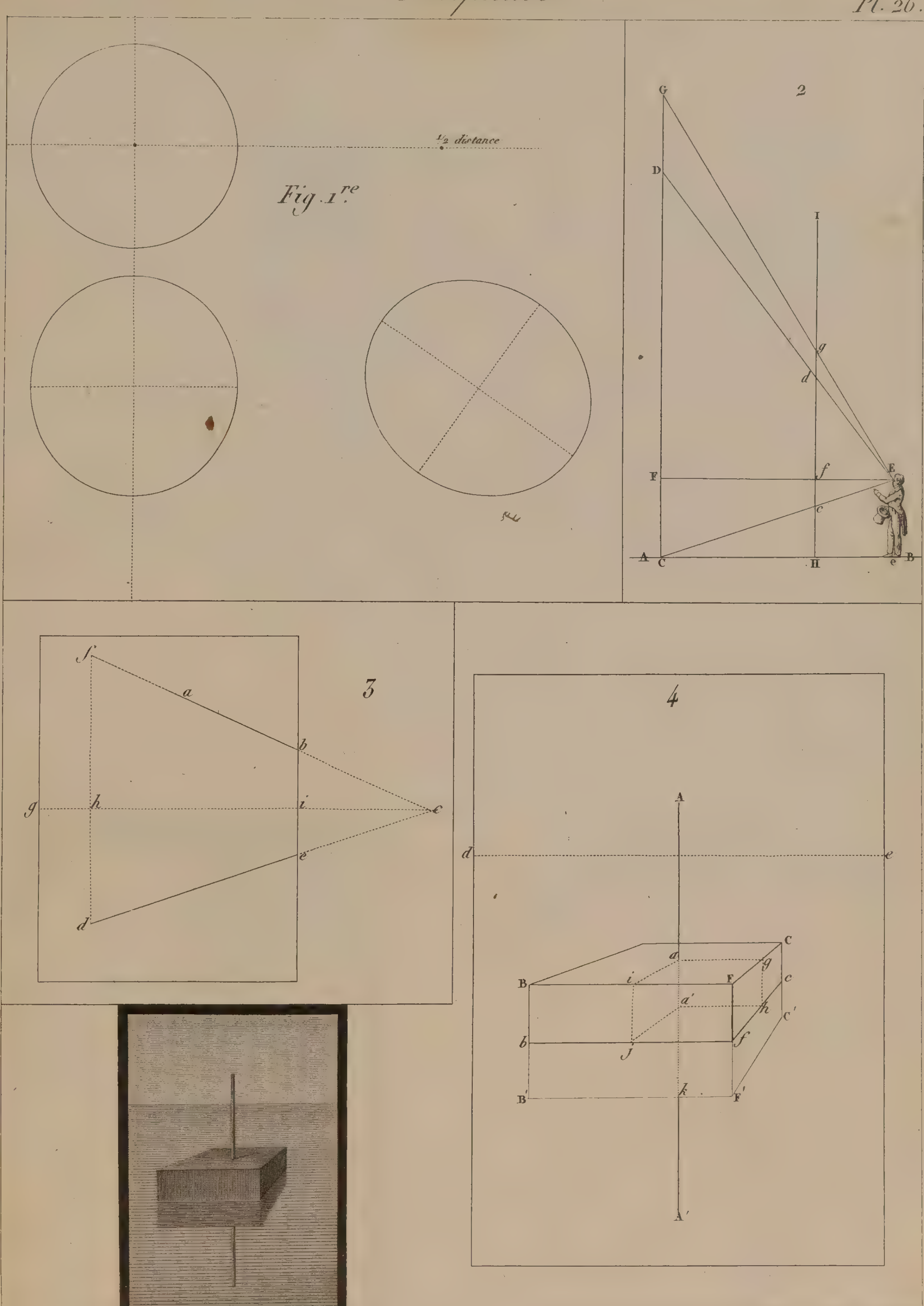
Adam sculp.

1.

2.

Cloquet del.

Adam sculp.



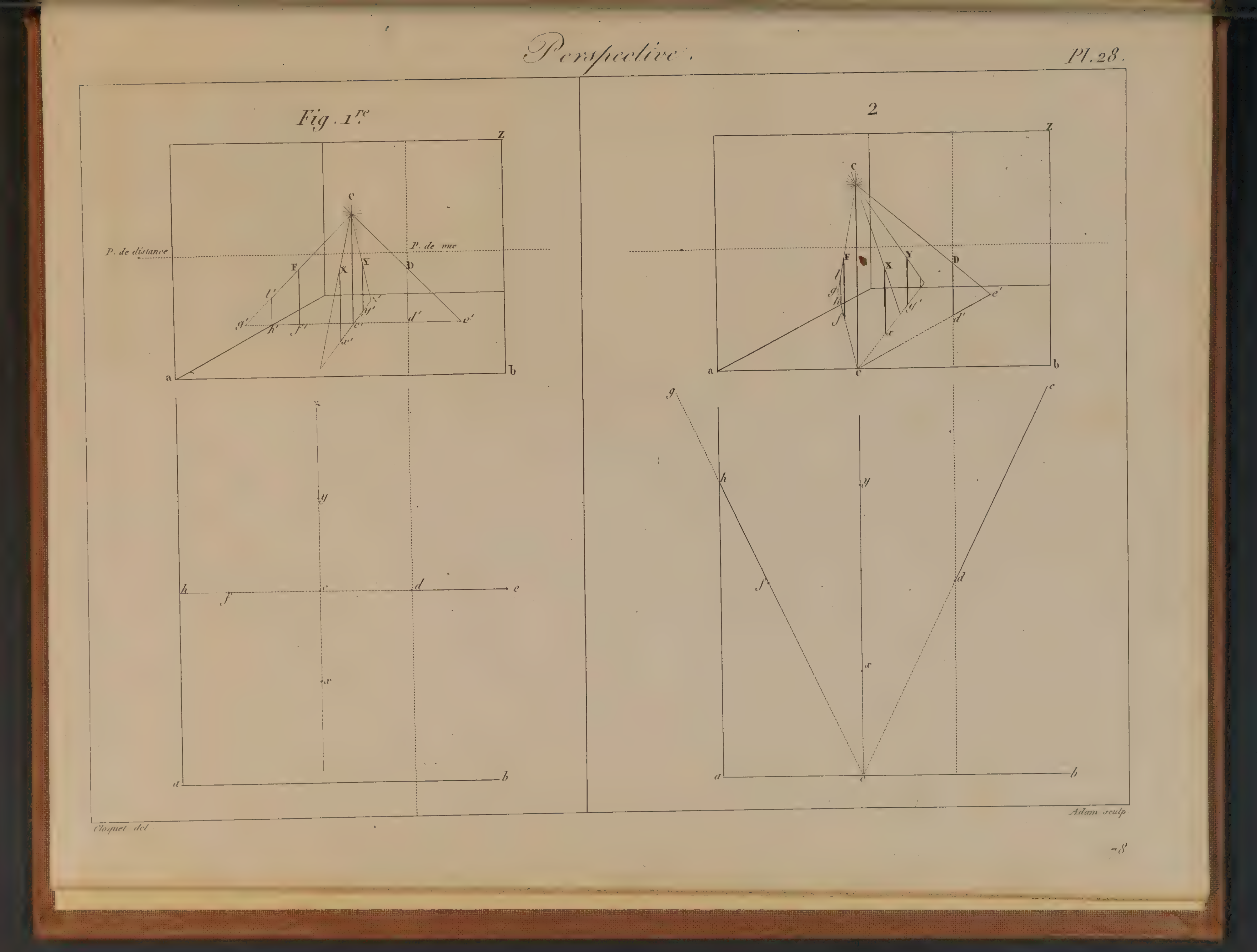
Cloquet del. Adam sculp.

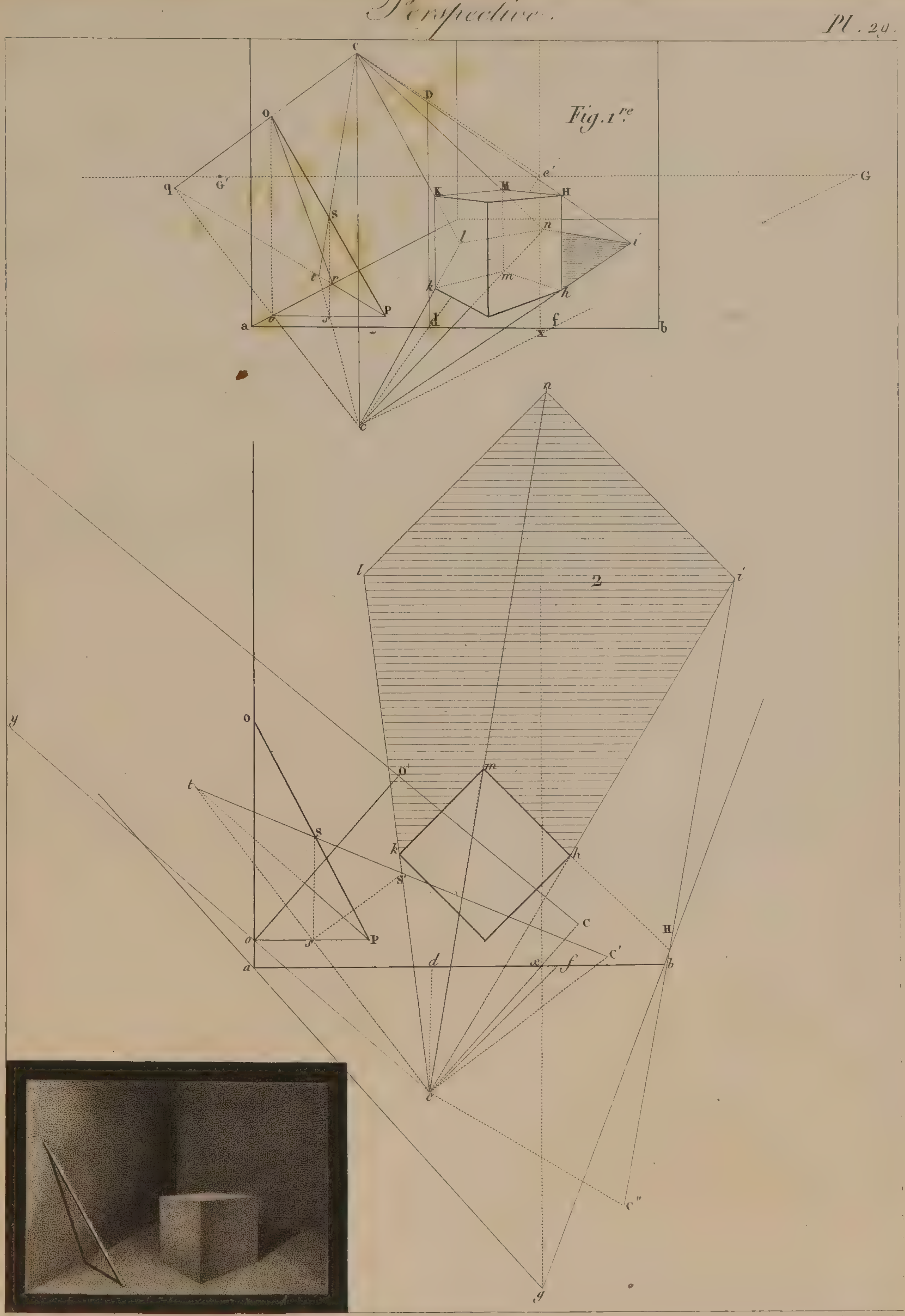
2.

Fig. 1re

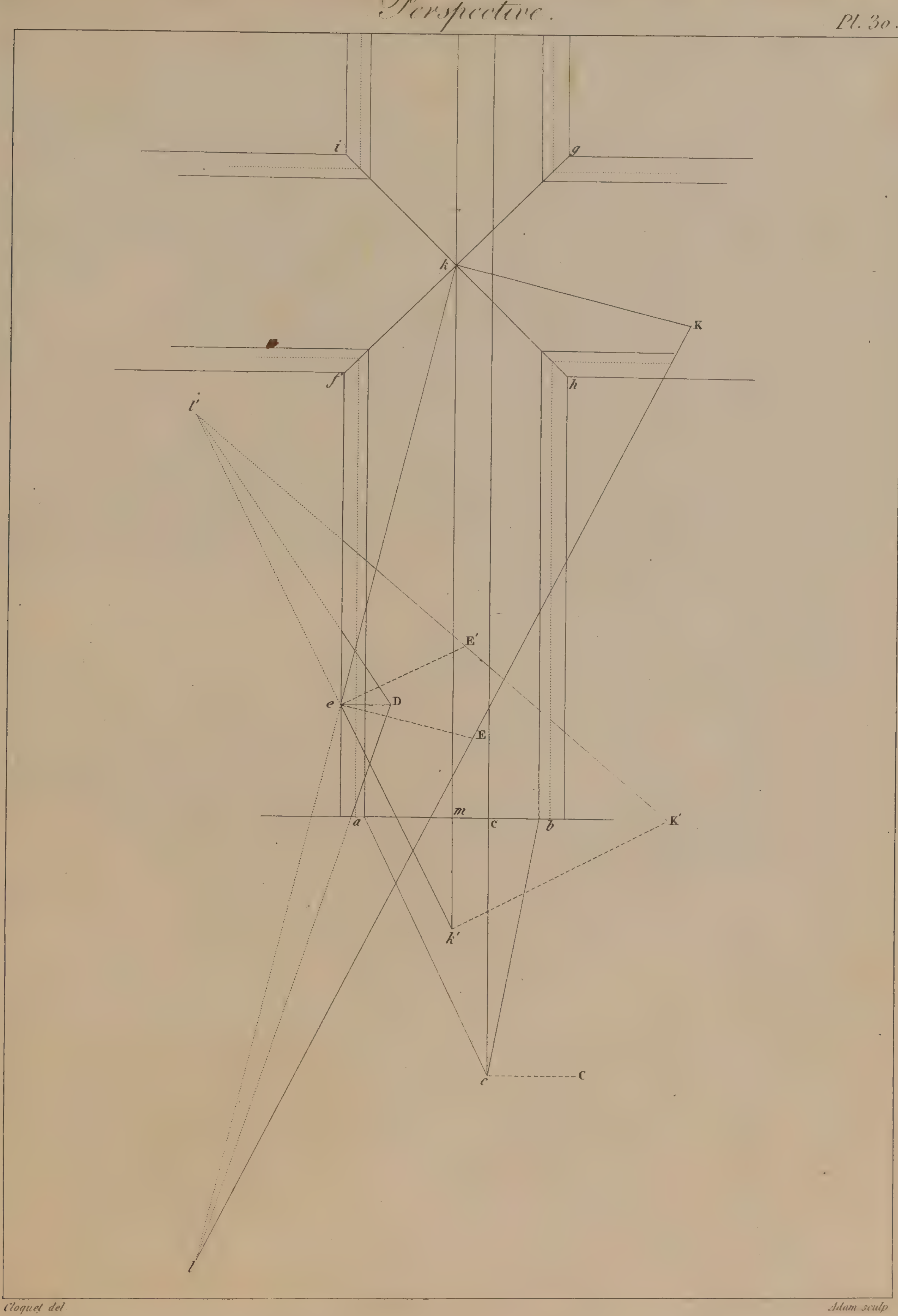
Cloquet del.

Adam sculp.


Fig. 1re
P. de distance
P. de vue
2
Cloquet del.
Adam sculp.

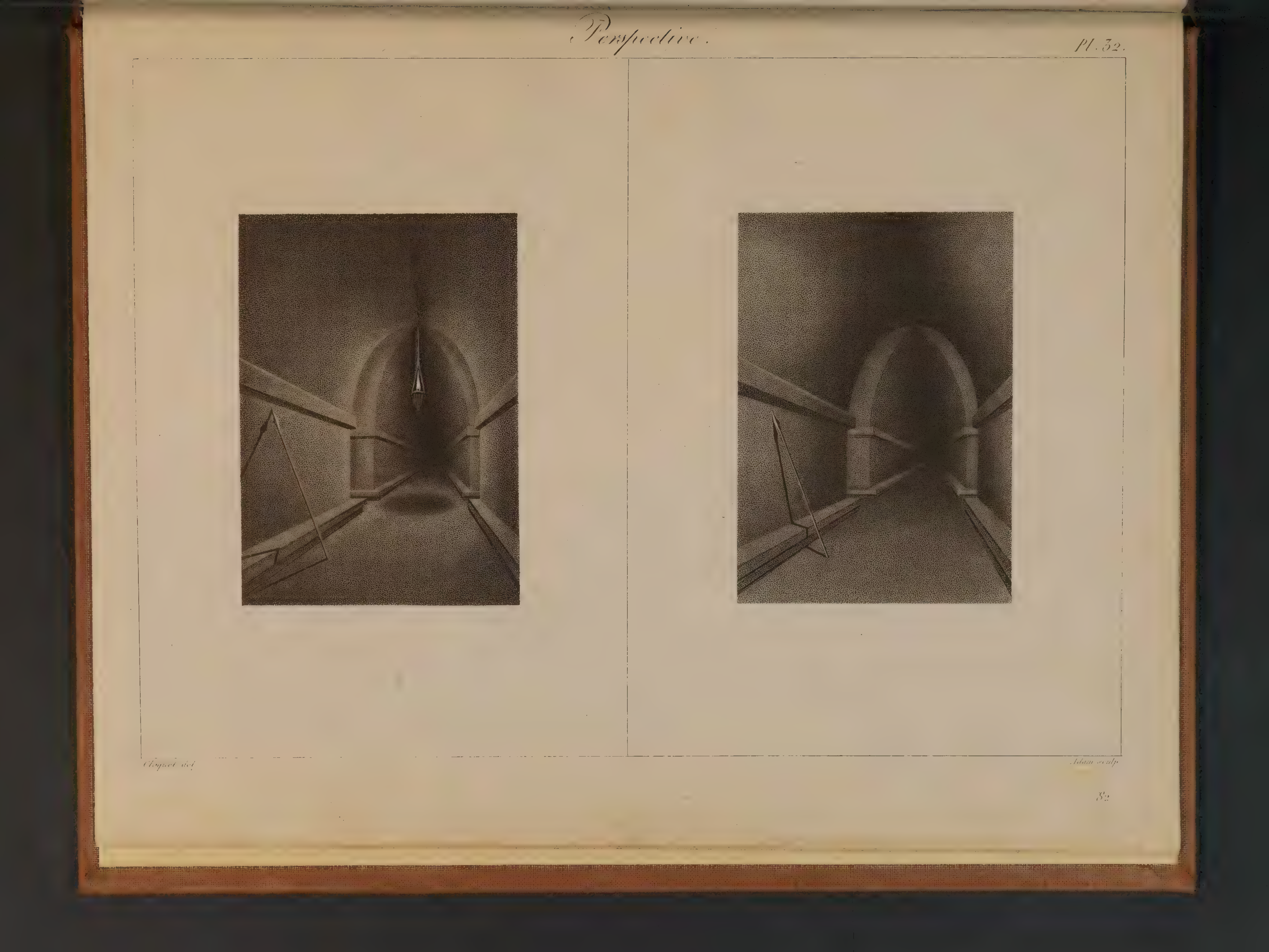


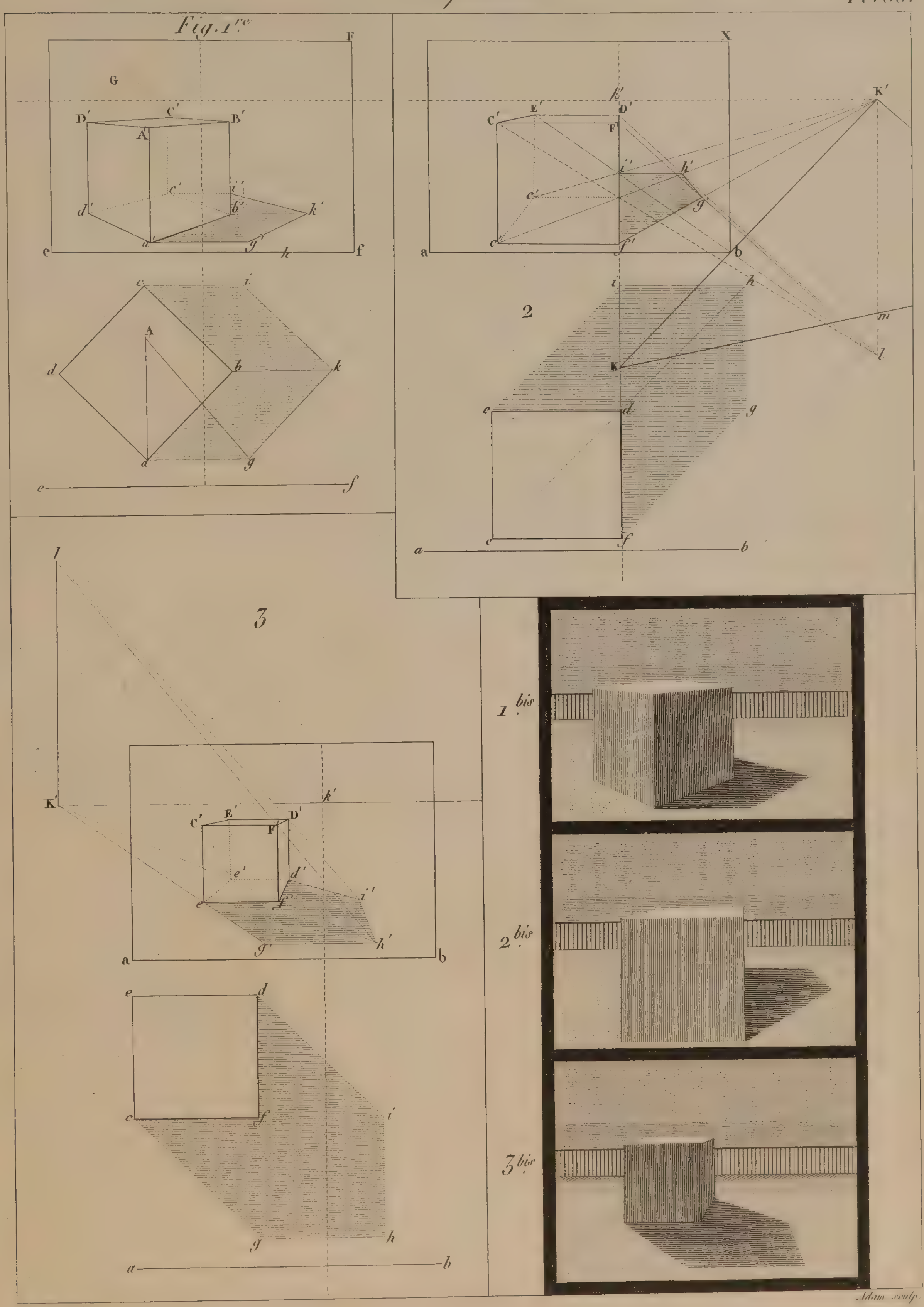
Cloquet del. Adam sculp.



Cloquet del. Adam sculp.

Cloquet del. Adam sculp.


Cloquet del.
Adam sculp.


Fig. 1re
2
3
1 bis
2 bis
3 bis
Cloquet del.
Adam sculp.

Perspective.

1.

2

3

4

5.

6.

Cloquet del.

Adam sculp.

